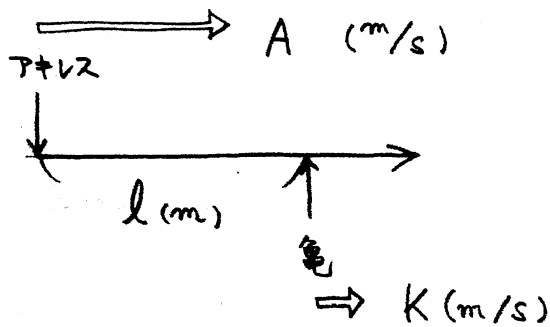


アキレスと亀

「足の速いアキレスが永遠に亀に追いつけない」という古代ギリシアの「ゼノンさんの逆理」をテーマにしました。



$$\text{速さ} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}$$

$$\text{m/s} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

秒速 \square メートル

ゼノンさんの考え方

$$A = 10 \quad K = 1 \quad l = 10 \text{ とすると}$$

Aが10m進むあいだにKは1m進みます。

Aが1m Kは0.1m

Aが0.1m Kは0.01m

Aが0.01m Kは0.001m

Aが0.001m Kは0.0001m

……
AがKがいた所にたどりつくあいだに、
Kは前にすすんでいて、いつまでたっても
AはKにおいつけません。

時間の単位について考えると、10分の1になっていきます。

$$1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \dots$$

筆算による割り算との共通点

$10 \div 9$ は

$$\begin{array}{r} 1.1111\dots \\ 9 \overline{) 10} \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ \vdots \end{array}$$

あまり1を10倍して、計算を続けていきます。

10倍の「虫かね」と見ることができます。

$$1.1111\dots$$

$$= 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \dots$$

別の考え方

t 秒後にアキレスに亀が追いつくとすると、

$$\begin{aligned} A \text{ (m/s)} \cdot t \text{ (s)} \\ = l \text{ (m)} + K \text{ (m/s)} \cdot t \text{ (s)} \end{aligned}$$

$$A \cdot t \text{ (m)} = l \text{ (m)} + K \cdot t \text{ (m)}$$

$$A \cdot t \text{ (m)} - K \cdot t \text{ (m)} = l \text{ (m)}$$

$$(A - K) \cdot t \text{ (m)} = l \text{ (m)}$$

$$t \text{ (s)} = \frac{l \text{ (m)}}{A - K \text{ (m/s)}}$$

$$A = 10, K = 1, l = 10 \text{ とすると}$$

$$10t = 10 + t$$

$$10t - t = 10$$

$$9t = 10$$

$$t = \frac{10}{9}$$

$\frac{10}{9}$ 秒後に追いつきます。

5

6

2つの考え方より

$$\frac{10}{9} = 1.1111 \dots$$

と言えそうです。

アキレスと亀の速さを変えてみます。

$$A = 2, K = 1, l = 2$$

$$t = \frac{2}{2-1} = 2$$

$$t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$A = 3, K = 1, l = 3$$

$$t = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$$

$$t = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

まとめ

$$A = N, K = 1, l = N \text{ とします。}$$

$$t = \frac{N}{N-1}$$

$$t = 1 + \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^3} + \frac{1}{N^4} + \dots$$

これより、

$$\frac{N}{N-1} = 1 + \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^3} + \frac{1}{N^4} + \dots$$

変形すると、

$$\frac{1}{N-1} = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^3} + \frac{1}{N^4} + \dots$$

2つの考え方のちがいは何なのでしょうか。