

ハレイの方法(3次収束)の始まり

についての予想

2007. 7. 17

林 邦英

武田 利一 様

2007.7.17

林 邦英

ハレイの方法の始まりについて考えてみました。

Xが1の近くにおいて成立する近似式

$$\sqrt{X} \approx \frac{3X + 1}{X + 3}$$

は、分数の形式の数値分析ではないかと思いました。1近くの分数の平方根について調べました。

$$\text{分子} - 1 = \text{分母}$$

$$\text{分子} - 2 = \text{分母}$$

$$\text{分子} - 4 = \text{分母}$$

の場合の計算方法についてP.1~P.8にまとめました。

P.9の表は、この方法で作ることかできません。P.10~P.12は、表の加工です。P.12の表から、上の式を求めることは、可能だと思えます。

1に近い分数の平方根の近似分数の観察

$\sqrt{3/2}$  の場合 (分子-1=分母の場合)

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = 1.2247448$$

$$= 1 + (4, 2)_n$$

2-クワット互除法による近似分数

① ④ ② ④ ② 漸化式による計算例

$$\frac{1}{1} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{11}{9} \quad \frac{49}{40} \quad \frac{109}{89} \quad \begin{matrix} 49 = 11 \times 4 + 5 \times 1 \\ 89 = 40 \times 2 + 9 \times 1 \end{matrix}$$

$$A + \frac{1}{2} \quad -1$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{5}{4}$$

$$\frac{11}{9} \quad \frac{49}{40}$$

$$\frac{109}{89}$$

$$109 = 11 \times 10 - 1$$

$$K = 10 = 5 \times 2$$

ヘロン式反復法による近似分数

$$\frac{5}{4} \quad \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{5} \quad \frac{11}{9} = \frac{5+6}{4+5}$$

$$\frac{1}{0} \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad K=10$$

$$\frac{5}{4} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{11}{9}$$

$$\frac{\frac{5}{4} + \frac{6}{5}}{2} \quad \frac{40 \cdot 3}{49 \cdot 2} \quad \frac{11 \times 10 - 1}{9 \times 10 - 1}$$

$$\frac{49}{40} \quad \frac{60}{49} \quad \frac{109}{89}$$

$$A = -1 \quad A = 3/2 \quad A = 1/2$$

$$\frac{5}{4} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{11}{9} \quad \begin{matrix} (11+9) \div 2 = 10 \\ 10 \div 2 = 5 \end{matrix}$$

$$\frac{B}{B-1} \quad \frac{B+1}{B} \quad \frac{A+1}{A-1} \quad \begin{matrix} 10 = A \\ 5 = B \end{matrix}$$

$\sqrt{5/4}$  の場合

$$\sqrt{\frac{5}{4}} = 1.1180339$$

$$= 1 + (8, 2)_n$$

2-クワット互除法による近似分数

① ⑧ ② ⑧ ② ⑧

$$\frac{1}{1} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{19}{17} \quad \frac{161}{144} \quad \frac{341}{305} \quad \frac{2889}{2584}$$

$$A + \frac{1}{4} \quad -1$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{9}{8}$$

$$\frac{19}{17} \quad \frac{161}{144}$$

$$\frac{341}{305} \quad \frac{2889}{2584}$$

$$K = 18 = 9 \times 2$$

ヘロン式反復法による近似分数

$$\frac{9}{8} \quad \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{9} \quad \frac{19}{17}$$

$$\frac{1}{0} \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad K=18$$

$$\frac{161}{144} \quad \frac{180}{161} \quad \frac{341}{305}$$

$$\frac{3}{2} \quad \begin{matrix} 3 \times 9 = 12 \\ 2 \times 9 = 18 \end{matrix} < 10 \quad K=10$$

$$\frac{5}{4} \quad \begin{matrix} 5 \times 9 = 20 \\ 4 \times 9 = 36 \end{matrix} < 18 \quad K=18$$

5

6

 $\sqrt{9/8}$  の場合

$$\frac{9}{8} \quad 9 \times 9 = 36 < 34 \quad k=34$$

$$(\%) \quad (\%) \quad (\%) \quad 34 \div 2 = 17$$

$$\frac{17}{16} \quad \frac{18}{17} \quad \frac{35}{33}$$

$$\left( \begin{array}{l} 17 \times 34 - 1 = 577 \\ 16 \times 34 = 544 \\ 577^2 - 1 = 544^2 \times \frac{9}{8} \\ 35 \times 34 - 1 = 1189 \\ 33 \times 34 - 1 = 1121 \\ 1189^2 + \frac{1}{8} = 1121^2 \times \frac{9}{8} \end{array} \right.$$

$$\frac{577}{544}$$

$$\frac{1189}{1121}$$

7

8

 $\sqrt{21/19}$  の場合

$$\frac{21}{19} \quad 21 \times 2 = 42 < 40$$

$$19 \times 2 = 38 \quad 40 \div 2 = 20$$

$$\frac{20}{19} \quad \frac{21}{20} \quad \frac{41}{39}$$

$$(41 \div 39)^2 \times 19 = 20.998682$$

 $\sqrt{7/5}$  の場合 (分子-2=分母の場合)

$$\sqrt{\frac{7}{5}} = 1.1832159$$

$$= 1 + (5, 2)_n$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{5} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{5} \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{13}{11} \quad \frac{21}{60} \quad \frac{155}{131}$$

$$\frac{6}{5} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{13}{11} < k=12$$

$$\frac{71}{60} \quad \frac{60}{71} \cdot \frac{7}{5} = \frac{84}{71} \quad \frac{155}{131}$$

$$\frac{7}{5} \quad \frac{7 \times 2 = 14}{5 \times 2 = 10} < 12$$

 $\sqrt{19/15}$  の場合 (分子-9=分母の場合)

$$\sqrt{\frac{19}{15}} = 1.125462868$$

$$= 1 + (7, 1, 32, 1, 7, 2)_n$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{7} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{32} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{7} \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{8}{7} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{296}{263} \quad \frac{305}{271} \quad \frac{2431}{2160} \quad \frac{5167}{4591}$$

$$\uparrow$$

$$A = +0.06$$

$$\uparrow$$

$$A = -1$$

$$K = 2431 \times 2 = 4862$$

$$(9 \div 8)^2 \times 15 = 18.984375$$

$$\frac{19}{15} \quad 19 \times 1 = 19 < 17$$

$$15 \times 1 = 15$$

$$\frac{17+1}{17-1} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

## 1 近&lt;math&gt;a&lt;/math&gt;の数の平方根の表 (1)

1.01	$\frac{403}{401}$	1.1	$\frac{43}{41}$
1.02	$\frac{203}{201}$	1.2	$\frac{23}{21}$
1.03		1.3	
1.04	$\frac{103}{101}$	1.4	$\frac{13}{11}$
1.05	$\frac{83}{81}$	1.5	$\frac{11}{9}$
1.06		1.6	
1.07		1.7	
1.08	$\frac{53}{51}$	1.8	$\frac{4}{3}$
1.09		1.9	
		2.0	$\frac{2}{5}$

## 1 近&lt;math&gt;a&lt;/math&gt;の数の平方根の表 (2)

1.01	$\frac{403}{401}$	1.1	$\frac{43}{41}$
1.02	$\frac{406}{402}$	1.2	$\frac{46}{42}$
1.03		1.3	
1.04	$\frac{412}{404}$	1.4	$\frac{52}{44}$
1.05	$\frac{415}{405}$	1.5	$\frac{55}{45}$
1.06		1.6	
1.07		1.7	
1.08	$\frac{424}{408}$	1.8	$\frac{64}{48}$
1.09		1.9	
		2.0	$\frac{70}{50}$

## 1 近&lt;math&gt;a&lt;/math&gt;の数の平方根の表 (3)

1.01	$\frac{403}{401}$	1.1	$\frac{43}{41}$
1.02	$\frac{406}{402}$	1.2	$\frac{46}{42}$
1.03	$\frac{409}{403}$	1.3	$\frac{49}{43}$
1.04	$\frac{412}{404}$	1.4	$\frac{52}{44}$
1.05	$\frac{415}{405}$	1.5	$\frac{55}{45}$
1.06	$\frac{418}{406}$	1.6	$\frac{58}{46}$
1.07	$\frac{421}{407}$	1.7	$\frac{61}{47}$
1.08	$\frac{424}{408}$	1.8	$\frac{64}{48}$
1.09	$\frac{427}{409}$	1.9	$\frac{67}{49}$
1.10	$\frac{430}{410}$	2.0	$\frac{70}{50}$

## 1 近&lt;math&gt;a&lt;/math&gt;の数の平方根の表 (4)

1.01	$\frac{4.03}{4.01}$	1.1	$\frac{4.3}{4.1}$
1.02	$\frac{4.06}{4.02}$	1.2	$\frac{4.6}{4.2}$
1.03	$\frac{4.09}{4.03}$	1.3	$\frac{4.9}{4.3}$
1.04	$\frac{4.12}{4.04}$	1.4	$\frac{5.2}{4.4}$
1.05	$\frac{4.15}{4.05}$	1.5	$\frac{5.5}{4.5}$
1.06	$\frac{4.18}{4.06}$	1.6	$\frac{5.8}{4.6}$
1.07	$\frac{4.21}{4.07}$	1.7	$\frac{6.1}{4.7}$
1.08	$\frac{4.24}{4.08}$	1.8	$\frac{6.4}{4.8}$
1.09	$\frac{4.27}{4.09}$	1.9	$\frac{6.7}{4.9}$
1.10	$\frac{4.30}{4.10}$	2.0	$\frac{7.0}{5.0}$