No.

Date

平方根についての整理

2007.8.15

林邦英

アラビアの方法

$11^2 = 121 \quad \sqrt{10^2+21} \fallingdotseq 10 + \frac{21}{20}$

$12^2 = 144 \quad \sqrt{10^2+44} \fallingdotseq 10 + \frac{44}{20}$

$21^2 = 441 \quad \sqrt{20^2+41} \fallingdotseq 20 + \frac{41}{40}$

$22^2 = 484 \quad \sqrt{20^2+84} \fallingdotseq 20 + \frac{84}{40}$

$31^2 = 961 \quad \sqrt{30^2+61} \fallingdotseq 30 + \frac{61}{60}$

$32^2 = 1024 \quad \sqrt{30^2+124} \fallingdotseq 30 + \frac{124}{60}$

一般化すると

$$\sqrt{A^2+a} \fallingdotseq A + \frac{a}{2A}$$

連分数の表わし方

ボンベリ式

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{3}{4+}$$

$$= 2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4+}}}$$

ユークリッド式

$$\sqrt{7} = 2 + (1, 1, 1, 4)_{\infty}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4+}}}}$$

$\sqrt{B} \fallingdotseq \frac{M}{N}$ について

$M^2 + A = B \cdot N^2$ の式のAによって分析する方法は役に立つ。

$\sqrt{7}$ について

① アラビアの方法

$$\sqrt{A^2+a} \fallingdotseq A + \frac{a}{2A}$$

$X \fallingdotseq A^2$ とした時の誤差 a を分析した方法で、微分法の始まりと考えることができる。

$$\sqrt{7} = \sqrt{4+3} = \sqrt{2^2+3} \fallingdotseq 2 + \frac{3}{4}$$

② ボンベリ式連分数

$$\sqrt{A^2+a} = A + \frac{a}{2A+}$$

アラビアの方法を使い、簡単に式を作ることができる。

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{3}{4+}$$

	②	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{2}{1}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{50}{19}$	$\frac{233}{88}$	$\frac{1082}{409}$	$\frac{5027}{1900}$
A	3	−9	27	−81	243	−729

（注意点）

a が 1 の場合　A は　1, −1 をくり返すが
a が 2以上の場合 A の絶対値は a^n になる。

（対策）

ユークリッド互除法を使いユークリッド式連分数にする。

$$\sqrt{7} \fallingdotseq \frac{5027}{1900} = 2 + (\underbrace{1, 1, 1, 4}_{\times 2}, 1, 1, 1, 19, 2)$$

×2 の規則性を使い

$\sqrt{7} = 2 + (1, 1, 1, 4)_{\infty}$ とする。

③ ユークリッド式連分数

A が周期をもって変化することを利用し、表を作り
$A = -1$ の場合の分子 分母の漸化式を求めることにより 効率的な計算ができる。

$\sqrt{7} = 2 + (1,1,1,4)_n$

② ① ① ① ④ ① ① ① ④ ① ①

$\frac{2}{1}\ \frac{3}{1}\ \frac{5}{2}\ \frac{8}{3}\ \frac{39}{14}\ \frac{45}{17}\ \frac{82}{31}\ \frac{127}{48}\ \frac{590}{223}\ \frac{717}{271}\ \frac{1307}{494}$

A 3 −2 3 −1 3 −2 3 −1 3 −2 3

A	3	−2	3	−1
	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$
	$\frac{39}{14}$	$\frac{45}{17}$	$\frac{82}{31}$	$\frac{127}{48}$
	$\frac{590}{223}$	$\frac{717}{271}$	$\frac{1307}{494}$	

横の漸化式

$127\times4+82\times1=590$ ④

$271\times1+223\times1=494$ ①

$5027=1082\times4+233\times3$ $\frac{3}{4}$

縦の漸化式

$127\times16-8=2024$

$48\times16-3=765$

$K=16=8\times2$

④ ヘロン式反復法

$$A > \frac{A+B}{2} > \sqrt{A\cdot B} > \frac{2\cdot A\cdot B}{A+B} > B$$

縦横の長さA,Bの長方形を面積を変えないで正方形に近づける方法と見ることができる。

$\sqrt{7}$の場合は $\frac{8}{3}$ から始める。

$8^2-1=7\times3^2$

$\frac{8}{3}$ $\qquad 7\times\frac{3}{8}=\frac{21}{8}$

$\dfrac{\frac{8}{3}+\frac{21}{8}}{2}=\frac{127}{48}$ $\qquad 7\times\frac{48}{127}=\frac{336}{127}$

$\dfrac{\frac{127}{48}+\frac{336}{127}}{2}=\frac{32257}{12192}$

ユークリッド式連分数	ヘロン式反復法
$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$
$\frac{127}{48}$	$\frac{127}{48}$
$\frac{2024}{765}$	
$\frac{32257}{12192}$	$\frac{32257}{12192}$
$\frac{514088}{194307}$	
$\frac{8193151}{3096720}$	
$\frac{130576328}{49353213}$	
$\frac{2081028097}{786554688}$	$\frac{2081028097}{786554688}$

$\frac{8}{3}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{29}{11}$
$\frac{127}{48}$	$\frac{336}{127}$	$\frac{463}{175}$
$\frac{32257}{12192}$	$\frac{85344}{32257}$	$\frac{117601}{44449}$
$A=-1$	$A=7$	$A=6$

$\sqrt{\frac{3}{2}}$ の場合

$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{9}$
$\frac{49}{40}$	$\frac{60}{49}$	$\frac{109}{89}$
$A=-1$	$A=\frac{3}{2}$	$A=\frac{1}{2}$

⑤ 開平法

十進法に対応した計算方法で、1桁ずつ数値を求めてゆく。

$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$

$= A^2+(2A+B)\cdot B$

$\sqrt{7} = 2.64575\ldots$

2	
2	-4
46	300
6	-276
524	2400
4	-2096
5285	30400
5	-26425
52907	397500
7	-370349
529145	2715100
5	-2645725

$\sqrt{\frac{3}{2}}$ について

$\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{1+\frac{1}{2}} \fallingdotseq 1+\frac{1}{4}$

$1+\frac{1}{4+} = \sqrt{5}-1$ となる。

①	④	④	④	④	④	④
$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{21}{17}$	$\frac{89}{72}$	$\frac{377}{305}$	$\frac{1597}{1292}$	$\frac{6765}{5473}$

$5^2 \fallingdotseq 1 \cdot \frac{3}{2} \times 4^2$

$\frac{5}{4}$ $\quad \frac{3}{2}\times\frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ $\quad \frac{11}{9}$

$\dfrac{\frac{5}{4}+\frac{6}{5}}{2} = \frac{49}{40}$ $\quad \frac{3}{2}\times\frac{40}{49} = \frac{60}{49}$ $\quad \frac{109}{89}$

$\dfrac{\frac{49}{40}+\frac{60}{49}}{2} = \frac{4801}{3920}$

$\sqrt{\frac{3}{2}} \fallingdotseq \frac{4801}{3920} = 1+(4,\underbrace{2,4,2,4,2,4}_{\times 2 \, を})$

×2 の規則性

$\sqrt{\frac{3}{2}} \fallingdotseq 1+(4,2)_n$

①	④	②	④	②	④	②
$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{49}{40}$	$\frac{109}{89}$	$\frac{485}{396}$	$\frac{1079}{881}$

④	②	④
$\frac{4801}{3920}$	$\frac{10681}{8721}$	$\frac{47525}{38804}$

$k=10$

$A=-1$	$A=\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{1}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{9}$
$\frac{49}{40}$	$\frac{109}{89}$

$\sqrt{\frac{3}{2}} = 1+(4,2)_n$ $\quad k=10$

$A=-1$	$A=\frac{3}{2}$	$A=\frac{1}{2}$
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{9}$
$\frac{49}{40}$	$\frac{60}{49}$	$\frac{109}{89}$
$\frac{485}{396}$	$\frac{594}{485}$	$\frac{1079}{881}$
$\frac{4801}{3920}$	$\frac{5880}{4801}$	$\frac{10681}{8721}$
$\frac{47525}{38804}$	$\frac{58206}{47525}$	$\frac{102731}{86329}$