

武田 利一 様

2011.9.11

林 邦英

杉浦 洋さん(南山大学)より、立方根の
区間近似式の改善に関する手紙と資料をいた
だきました。少し紹介します。

$$g(x) = 1 + 1.8 \times 10^{-4} + \frac{x}{3 + x - \frac{9x^2}{59}} \cong \sqrt[3]{1+x}$$

相対誤差の最大絶対値を小さくすることが
できました。

$\sqrt{2}$ の近似分数の表の作成(研究レポート
C)について考え直しています。

簡単な計算法は $\sqrt{2}$ の時は使えます。

$\sqrt{3}$ と $\sqrt{5}$ の場合は約分をやることを使っ
てことができます。

加速法を使うと、大きな近似分数を求める
ことができます。次に問題となるのは、小さ
い近似分数の求め方です。

ハレ-法 (3次収束) は小さい近似分数を
求める必要の中で生まれたように思います。

$\sqrt{2}$ について

$$7^2 + 1 = 2 \times 5^2 \text{ より}$$

$$X = \frac{2 \times 5^2}{7^2} = \frac{50}{49} \text{ とする。}$$

$$K = 2 + \frac{4}{\frac{50}{49} - 1} = 2 + \frac{196}{1} = 198$$

$$\sqrt{2} \doteq \frac{(198 + 1) \times 7}{(198 - 1) \times 5} = \frac{1393}{985}$$

$$1393^2 + 1 = 2 \times 985^2$$

武田 利一様

2011.9.12

林 邦英

「2次関数の簡易グラフ書き」のレポートを
読ませていただきました。ありがとうございます。
[分解→単純化]をテーマにされたの
ではと思いました。大切な視点だと考えてい
ます。

「復刻版 カジョリ初等数学史 小倉金之助
補記 共立出版」43ページでアルキメデス
さんが「円の面積」のなかで使った

$$\sqrt{3} < \frac{1351}{780} \quad \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

近似分数を紹介しています。このことよりわ
かることは、大きい近似分数より小さい近似
分数を求める方がむづかしかったことです。

97

$\frac{97}{56}$ を使ったと思います。P.3に計算方
法を示しました。

1

2

$\sqrt{2}$ の近似分数を求める簡単な計算法

$\frac{a}{b}$	$2 \times \frac{b}{a}$	$\frac{a+2b}{b+a}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{17}{12}$
$\frac{17}{12}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{41}{29}$
$\frac{41}{29}$	$\frac{58}{41}$	$\frac{99}{70}$
$\frac{99}{70}$	$\frac{140}{99}$	$\frac{239}{169}$
$\frac{239}{169}$	$\frac{338}{239}$	$\frac{577}{408}$

(分子)² + A = 2 × (分母)²
 の A を使って分類します。

A	1	-2	-1	2
	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$
	$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{24}{17}$
	$\frac{41}{29}$	$\frac{58}{41}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{140}{99}$
	$\frac{239}{169}$	$\frac{338}{239}$	$\frac{577}{408}$	

3

4

$\sqrt{3}$ の場合

$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$
$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{14}{8} = \frac{7}{4}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{19}{11}$
$\frac{19}{11}$	$\frac{33}{19}$	$\frac{52}{30} = \frac{26}{15}$
$\frac{26}{15}$	$\frac{45}{26}$	$\frac{71}{41}$
$\frac{71}{41}$	$\frac{123}{71}$	$\frac{194}{112} = \frac{97}{56}$
$\frac{97}{56}$	を使って	
$\frac{97}{56}$	$\frac{168}{97}$	$\frac{265}{153}$
$97 \times 14 - 7 = 1351$	$\frac{1351}{780}$	
$56 \times 14 - 4 = 780$		

$\sqrt{5}$ の場合

$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{2} = \frac{3}{1}$
$\frac{3}{1}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{4} = \frac{2}{1}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{22}{10} = \frac{11}{5}$
$\frac{11}{5}$	$\frac{25}{11}$	$\frac{36}{16} = \frac{9}{4}$
$\frac{9}{4}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{29}{13}$
$\frac{29}{13}$	$\frac{65}{29}$	$\frac{94}{42} = \frac{47}{21}$
$\frac{47}{21}$	$\frac{105}{47}$	$\frac{152}{68} = \frac{38}{17}$

5

6

加速法 ($\sqrt{2}$ の場合)

$$2 = 2 \times 1$$

$$\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \quad 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12}$$

$$2 \times \frac{12}{17} = \frac{24}{17}$$

$$\frac{\frac{17}{12} + \frac{24}{17}}{2} = \frac{289+288}{408} = \frac{577}{408}$$

A	-1	2
	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$
	$\frac{17}{12}$	$\frac{24}{17}$
	$\frac{577}{408}$	

 $\sqrt{2} > \frac{2}{5}$ の求め方

$$\frac{2}{1} \qquad \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{1} \qquad \frac{6+1}{6-1} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{2}{1} \qquad 6 \quad \frac{6+1}{6-1} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{2}{1} \quad \frac{8+4}{2} = 6 \quad \frac{6+1}{6-1} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{2}{1} \begin{matrix} (x4) \\ (x4) \end{matrix} \quad \frac{8}{4} \quad \frac{8+4}{2} = 6 \quad \frac{6+1}{6-1} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{\frac{7}{5} + \frac{10}{7}}{2} = \frac{99}{70} > \sqrt{2}$$

7

8

 $\sqrt{3}$ の場合

$$\frac{3}{1} \qquad \frac{5}{3}$$

$$\frac{3}{1} \qquad \begin{matrix} 4+1 \\ 4-1 \end{matrix} \quad \frac{5}{3}$$

$$\frac{3}{1} \qquad 4 \quad \begin{matrix} 4+1 \\ 4-1 \end{matrix} \quad \frac{5}{3}$$

$$\frac{3}{1} \qquad \frac{6+2}{2} = 4 \quad \begin{matrix} 4+1 \\ 4-1 \end{matrix} \quad \frac{5}{3}$$

$$\frac{3}{1} \begin{matrix} (x2) \\ (x2) \end{matrix} \quad \frac{6}{2} \quad \frac{6+2}{2} = 4 \quad \begin{matrix} 4+1 \\ 4-1 \end{matrix} \quad \frac{5}{3}$$

$$\frac{7}{9} \begin{matrix} (x2) \\ (x2) \end{matrix} \quad \frac{14}{18} \quad 16 \quad \begin{matrix} (-1) \\ (+1) \end{matrix} \quad \frac{15}{17} \begin{matrix} (x3) \\ \end{matrix} \quad \frac{45}{17}$$

$$\left(\frac{45}{17}\right)^2 = 7.006920412$$

 $\sqrt{5}$ の場合

$$\frac{5}{1} \begin{matrix} (x1) \\ (x1) \end{matrix} \quad \frac{5}{1} \quad \frac{5+1}{2} = 3 \begin{matrix} (+1) \\ (-1) \end{matrix} \quad \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{5}{4} \begin{matrix} (x4) \\ (x4) \end{matrix} \quad \frac{20}{16} \quad 18 \begin{matrix} (+1) \\ (-1) \end{matrix} \quad \frac{19}{17} \begin{matrix} (x2) \\ \end{matrix} \quad \frac{38}{17}$$

$$\frac{10}{9} \begin{matrix} (x4) \\ (x4) \end{matrix} \quad \frac{40}{36} \quad 38 \begin{matrix} (+1) \\ (-1) \end{matrix} \quad \frac{39}{37} \begin{matrix} (x3) \\ \end{matrix} \quad \frac{117}{37}$$

$$\left(\frac{117}{37}\right)^2 = 9.999269538$$

$$\frac{\frac{2}{1} + \frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4} \quad \frac{2}{1} < \sqrt{5} < \frac{9}{4}$$

$$\frac{\frac{3}{1} + \frac{10}{3}}{2} = \frac{19}{6} \quad \frac{3}{1} < \sqrt{10} < \frac{19}{6}$$