武田 利一 様

2018.10.16

林 邦英

やっと秋らしくなりました。今年の夏は長く感じました。おいそがしい日々をすごされていると思います。お体に気をつけて下さい。

2000年の秋を思い出しています。東海豪雨のあった年です。階差を利用して数列の一般項を求める方法に出あうことができ、数学の研究を本格的に始めた年でもあります。

18年間調べましたが、先行する研究は、武田利一さんの「幻の0番法」以外これというものに出あうことができませんでした。もしこれ以外にもあったことをごぞんじでしたらせひ、教えていただきたく思っています。

そもそもの始まりですが、高校数学では、平方数の数列の和を公式としておぼえ、公式の求め方を軽視しているのではないのかという疑問を持ったことです。自然数の和を求めるガウスさんの話は有名です。これを使うと

立方数の和を求める公式はすぐにわかります。
　平方数を100^2まで中学生の時に加えてみました。338350。当時は$y=x^2$の曲線によって作られる面積に1/3の係数があることに気をとられ、台形の形を利用することで333350に近づけることができることまでは理解することができました。
　循環小数を研究することで、338350を別の見方で分析することができました。

N=10　385

N=100　338350

計算機の力を借りると

N=1000　33383350

この数値を利用する方法が、十進法を利用する係数分解法です。和算家建部賢弘さんの「綴術算経」でもこの方法は使われています。
　N=10の385の数値を素因数分解すると、385=5×7×11を使えないかと考えました。素数に着目する分析法は亀井喜々男さんに教えていただきました。Nが小さい

数のデータを使うことができます。4次式以上になると項の特定がむつかしくなります。

数値分析という視点から見ると「数」とは素数と進法の合体のような気がします。

進法ー和の形の式

$$\frac{1}{3}N^3+\frac{1}{2}N^2+\frac{1}{6}N$$

$\frac{1}{3}N^3$	333.333
$\frac{1}{2}N^2$	50
$\frac{1}{6}N$	1.666

素数ー積の形の式

$$\frac{1}{6}\cdot N\cdot N+1\cdot 2N+1$$

$10=5\times 2$
$11=11\times 1$
$21=7\times 3$

階差を使うと次数がわかります。数列の0項に着目するきっかけは、亀井論文でした。0項に着目することで、分析するデータの項数を1つ減らすことができました。M乗数の数列の和をテーマとしていたので、階差0項数列の構造を決定することができました。作り方は単純です。すぐにおぼえられるということは大切なことです。パスカルの三角数を少しだけ変化させました。

1	自然数
1　1	自然数の和
(×1)(×2)	
1　2	平方数
1　3　2	平方数の和
(×1)(×2)(×3)	
1　6　6	立方数
1　7　12　6	立方数の和
(×1)(×2)(×3)(×4)	
1　14　36　24	4乗数

あらかじめ一般項のわかっている数列の階差の項数列を調べることで、一意性の確認と使い方がわかりました。

□ B

$f(0) = c$
$f_1(0) = a + b$
$f_2(0) = 2a$

2-1

$f(0) = d$
$f_1(0) = a + b + c$
$f_2(0) = 6a + 2b$
$f_3(0) = 6a$

2-1

6-6-1

a，b，c の係数ごとに分解することで —A のめんどうな計算を省略することができました。

2001年は、循環小数の研究から平方根の近似分数の研究にすすみ、ハレー法（3次収束）に出あうことができました。

もしよろしければ、意感想をお知らせください。

おどる数学　別解集

磯野　幸著

知泉書館　2003年12月

〔テーマ〕

— A の部分の計算は大変にめんどくさいと思います。

□ B の部分を分析することで計算を単純にできないか考えてみました。

Newton（ニュートン）の式について

ニュートン補間法

2次関数は3段目が一定

2次関数　$y=ax^2+bx+c$　について考えよう．

$f(x)=ax^2+bx+c$ ……①

$g(x)=f(x+1)-f(x)$ ……②

$h(x)=g(x+1)-g(x)$ ……③

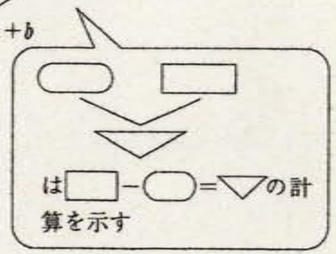
とおき，計算すると $h(x)$＝定数である．これを調べるわけです．具体的に計算してみます．

$$\begin{aligned} g(x)&=f(x+1)-f(x)\\ &=\{a(x+1)^2+b(x+1)+c\}-(ax^2+bx+c)\\ &=2ax+a+b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x)&=g(x+1)-g(x)\\ &=\{2a(x+1)+a+b\}-(2ax+a+b)\\ &=2a \quad \text{……一定} \end{aligned}$$

これを図式化しますと

	x	$x+1$	$x+2$
$f(x)$………	ax^2+bx+c	$a(x+1)^2+b(x+1)$	$a(x+2)^2+b(x+2)+c$
$g(x)$………	$2ax+a+b$		$2ax+3a+b$
$h(x)$………		$2a$	



つまり，2次関数は3段目が一定であるということです。

(1−1)　1次関数　$f(x)=ax+b$ については2段目が一定

3次関数　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ については4段目が一定

(1−2)　上の場合，整数 x の次の整数 $x+1$ として考えたが，1つとびの整数 $x+2$ として考えても同様に3段目が一定

(1−3)　②の $g(x)$ の計算で c が姿を消し，③の $h(x)$ の計算で b が姿を消し，$h(x)$ は a だけが残り一定

具体例でさらに詳しく筋道をたどろう。

練習題1

x の2次関数 $f(x)$ が

$f(0)=3$，$f(1)=4$，$f(2)=9$

を満たすとき $f(3)$ を求めよ．

$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ ……①

とおくと，$f(0)=3$，$f(1)=4$，$f(2)=9$ より

$$\begin{cases} c=3 & \text{……②} \\ a+b+c=4 & \text{……③} \\ 4a+2b+c=9 & \text{……④} \end{cases}$$

③−②より　$a+b=1$ ……⑤

④−③より　$3a+b=5$ ……⑥

⑥−⑤より　$2a=4$ ……⑦

⑦から $a=2$，これと⑤から $b=-1$，②から $c=3$

よって　$f(x)=2x^2-x+3$

したがって　$f(3)=18$　(答)

これを図式化すると

0　　1　　2
②　　③　　④
⑤　　⑥
⑦

(Ⅰ) 連立方程式の解法を図式化したもの

(c)　($a+b+c$)　($4a+2b+c$)
(c を消去)
($a+b$)　($3a+b$)
(b を消去)
($2a$)
(3段目は $2a$ で一定)

(Ⅱ)連立方程式の左辺を図式化したもの

3　　4　　9
1　　5
4

(Ⅲ)連立方程式の右辺を図式化したもの

(Ⅲ)を用いた図式による別解

0	1	2	3
3	4	9	18

1　　5　　9
4　　4

(3段目の4のとなりに4をかく
5＋4を計算　その結果の9を2段目にかく
9＋9を計算　その結果の18を1段目にかく)

したがって　$f(3)=18$

$f(x)=ax^2+bx+c$ ……①

$f_1(x)=f(x+1)-f(x)$

$f_2(x)=f_1(x+1)-f_1(x)$

0　　1　　2
c　　(　)　　(　)
$a+b$　　(　)
$2a$

B

とおくと
$$\boxed{\begin{cases} f(0)=c & \text{……②} \\ f_1(0)=a+b & \text{……③} \\ f_2(0)=2a & \text{……④} \end{cases}}$$

④から　$a=\dfrac{f_2(0)}{2}$

③から　$b=f_1(0)-\dfrac{f_2(0)}{2}$

②から　$c=f(0)$

したがって　①式は

$$f(x)=\frac{f_2(0)}{2}x^2+\left(f_1(0)-\frac{f_2(0)}{2}\right)x+f(0)$$

整理して　$f(x)=f(0)+f_1(0)x+\dfrac{f_2(0)}{2}\underline{x(x-1)}$ ……②　A

ところで本問では，$f(0)=3$，$f_1(0)=1$，$f_2(0)=4$ であるから

$\underline{f(x)=3+1\cdot x+\dfrac{4}{2}x(x-1)}$　C.

$\therefore\ f(x)=2x^2-x+3$

②式を Newton の式といいます．

練習題 2

x の 3 次関数 $f(x)$ が

$$f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=9,\ f(4)=34$$

を満たすとき $f(x)$ を求めよ．また $f(5)$ を求めよ．

まず $f(5)$ を求めよう．

1　4　9　34　97
3　5　25　63
2　20　38
18　18

したがって　$f(5)=97$

次に $f(x)$ を求めよう．

−18　1　4　9　34
19　3　5　25
−16　2　20
18　18

したがって

$$f(x)=-18+19x+\frac{-16}{2}x(x-1)+\frac{18}{6}x(x-1)(x-2) \quad C_2 \quad \cdots\cdots *$$

整理して　$f(x)=-18+19x-8x(x-1)+3x(x-1)(x-2)$　……①

$$f(x)=3x^3-17x^2+33x-18 \quad \cdots\cdots②$$

＊は 3 次関数についての Newton の式利用（次を参照のこと）

$f(5)$ は①か②に代入して求めても　$f(5)=97$

x の 3 次関数　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$　において

$f_1(x)=f(x+1)-f(x)$
$f_2(x)=f_1(x+1)-f_1(x)$
$f_3(x)=f_2(x+1)-f_2(x)$

とおくと　$f_3(x)=6a$（一定）となります．

0	1	2	3	4
$f(0)=d$	$a+b+c+d$	$8a+4b+2c+d$	$27a+9b+3c+d$	$64a+16b+4c+d$

$f_1(0)=a+b+c$　$7a+3b+c$　$19a+5b+c$　$37a+7b+c$
$f_2(0)=6a+2b$　$12a+2b$　$18a+2b$
$f_3(0)=6a$　$6a$

B

$$\boxed{\begin{cases} f(0)=d \\ f_1(0)=a+b+c \\ f_2(0)=6a+2b \\ f_3(0)=6a \end{cases}} \text{ より } \begin{cases} a=\dfrac{f_3(0)}{6} \\ b=\dfrac{1}{2}\left\{f_2(0)-f_3(0)\right\} \\ c=f_1(0)-\dfrac{f_3(0)}{6}-\dfrac{1}{2}\left\{(f_2(0)-f_3(0)\right\} \\ d=f(0) \end{cases}$$

したがって

$$f(x)=\frac{f_3(0)}{6}x^3+\frac{1}{2}\{f_2(0)-f_3(0)\}x^2+\left\{f_1(0)-\frac{f_3(0)}{6}-\frac{1}{2}\left(f_2(0)-f_3(0)\right)\right\}x+f(0)$$

整理すると

$$f(x)=f(0)+f_1(0)x+\frac{f_2(0)}{2}x(x-1)+\frac{f_3(0)}{6}x(x-1)(x-2) \quad A$$

本問では，$f(0)=-18$，$f_1(0)=19$，$f_2(0)=-16$，$f_3(0)=18$（図式による）であるから，上の式に代入して㊟を導いています．

上の式が 3 次の Newton の式です．

一般に Newton の式は

$f_1(x)=f(x+1)-f(x)$
$f_2(x)=f_1(x+1)-f_1(x)$
$f_3(x)=f_2(x+1)-f_2(x)$
⋮
$f_n(x)=f_{n-1}(x+1)-f_{n-1}(x)$

とおくと

$$f(x)=f(0)+f_1(0)x+\frac{f_2(0)}{2!}x(x-1)+\frac{f_3(0)}{3!}x(x-1)(x-2)$$
$$+\cdots\cdots+\frac{f_n(0)}{n!}x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n+1) \quad A$$

と表されます．

C_1

$$f(x) = 3 + 1 \cdot x + \frac{4}{2} x(x-1)$$
$$= 3 + x + 2(x^2 - x)$$
$$= 3 + x + 2x^2 - 2x$$
$$= 2x^2 + (x - 2x) + 3$$
$$= 2x^2 - x + 3$$

C_2

$$f(x) = -18 + 19x + \frac{-16}{2} x(x-1) + \frac{18}{6} x(x-1)(x-2)$$
$$= -18 + 19x - 8x(x-1) + 3x(x-1)(x-2)$$
$$= -18 + 19x - 8(x^2 - x) + 3(x^3 - 3x^2 + 2x)$$
$$= -18 + 19x - 8x^2 + 8x + 3x^3 - 9x^2 + 6x$$
$$= 3x^3 + (-8x^2 - 9x^2) + (19x + 8x + 6x) - 18$$
$$= 3x^3 - 17x^2 + 33x - 18$$