

武田 利一様

2018.12.09

林 邦英

今年も残りわずかにな、てしまいました。
急に寒くなりました。お体には気をつけて下
さい。

平方根に関する研究を少し整理してみました。
奥の深いテーマでまだまだ不十分なもので
す。もうしわけありません。

山口県に岡潔さんの「春宵十話」の発見の
鋭い喜びにならい、(再)発見の喜び、感動
を大切にされている方がいることを知りまし
た。生徒が受動的に学習するのではなく、主
体的に学習することは、大切なことだと思っ
ます。

ハレー法(3次収束)は、何度も再発見さ
れています。日本では、HITOTUMATU さんと
よって再発見されたことを、日本大学の先生
に教えていただきました。

$$K = 2 + \frac{4}{x-1}$$

の式のもつ意味を知ったのは、 $\sqrt{83}$ を求める計算をした時です。

83 / 81 とし、後の分子を9倍しました。

$$\begin{aligned} 2 + \frac{4}{\frac{83}{81} - 1} &= 2 + \frac{4 \times 81}{83 - 81} \\ &= 2 + \frac{324}{2} = 164 \end{aligned}$$

$$\frac{(164 + 1) \times 9}{164 - 1} = \frac{1485}{163}$$

$$\left(\frac{1485}{163} \right)^2 = 82.999924$$

当時は8桁の電卓を使い、2けたの2この数字をみてびっくりしました。そして、使い方がわかりました。

2001年の今ごろだ、たように思います。

平方根を求める計算方法

2018.12.09

林 邦英

開平法は十進法表記に対応し、主計算と副計算に分解することで計算量を小さくする工夫がされています。中学の数学の教科書にものっていました。

久留島義太さんの平方零約術を始めて見た時に、どうして、このような複雑な計算をするのかわかりませんでした。面積を変えずに長方形を正方形に近づけてゆく方法の方が簡単だからです。平方根の近似分数を連分数を使って求める方法に2種類あることを知った時に、やっと意味がわかりました。

$\sqrt{67}$ を $67 = 8^2 + 3$ から始めています。 $8 + \frac{3}{16} \rightarrow 8 + \frac{3}{16 + \frac{3}{16 + \dots}}$

という形の連分数でも $\sqrt{67}$ を求めることはできます。しかし、 $\frac{48842}{5967}$

2

の近似分数を求めることはできません。

$48842^2 - 1 = 67 \times 5967^2$ の式で示されるように最良の近似分数の元になる分数です。 -1 または $+1$ の持つ意味は？

$$\sqrt{67} = 8 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$8 + (5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16)$ の形です。

しかも、回文構造を利用して、青い線の部分の計算で後半を求めています。強弱(分子の2乗と分母の2乗 $\times 67$ の差)も求めているからです。

2つの方法にはそれぞれ長所があります。前者は、式を簡単に作ることができます。後者によって求めることのできる「最良」の意味ですが、同じ計算量の場合の誤差の大きさが一番小さい事です。誤差の大きさの式は、 $[\text{強弱} \div 2 \div \text{分子} \div \text{分母}]$ です。

アラビアの手法

$$a + \frac{x}{2a} > \sqrt{a^2 + x} > a + \frac{x}{2a+1}$$

の左辺は、一点近似(接線法)で右辺は、区間近似を表わしています。

＝宮市三先生に教えていただいた区間近似式は、平方根の区間が1から2で、一次式で相対誤差が最小になるものですが、計算を求めることができ、さらに、最大誤差も求めることができます。

$$0.417308x + 0.590162$$

ニュートン法の初期値に関する研究です。テイラー展開は、区間近似には向きません。私は、反比例のグラフの曲線が使えないかなと考えました。ハレー法の発展です。

$$\sqrt[3]{1+x} \approx \frac{2x+3}{x+3} \quad \frac{3x+7}{x+7}$$

$$0 < x < 1 \quad 1 < x < 7$$

左の式を少し変化させて右の式の形にしました。

累乗根に関するすぐれた研究があります。

$$x^{\frac{1}{n}} \approx \frac{(n+3)x + 4n\sqrt{x} + (n-3)}{(n-3)x + 4n\sqrt{x} + (n+3)}$$

高知県の高木さんが作りました。(2014年)

$n = 6.5$ $x = 1.3$ の場合、

1.041189420	真数
1.041195058	高木法
1.040955631	林法
1.046153846	接線法

2001年の秋から2002年の春にかけて行った、平方根の近似分数に関する資料を少し整理しました。3次収束(ハレー法)の再発見に至る経過を示しました。

区間近似への応用は、2011年の春に行いました。

$$\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + 1.8 \times 10^{-4} + \frac{x}{3+x - \frac{9x^2}{59}}$$

($0 < x < 1$)

相対誤差を小さくする工夫

名古屋大学の二宮市三先生には、ニュートン法（2次収束）とハレー法（3次収束）のちがいを教えていただきました。

上智大学の和田秀男先生には、平方根の近似分数の作り手が2種類あることと気づかせていただきました。ユークリッド互除法を使って分析する方法と簡便法による方法です。

南山大学の杉浦洋先生には、立方根の区間近似式に定数項を加え相対誤差の最大絶対値を小さくする改善をいただきました。

平方根の計算は、今日では電卓の√キーをおおげしく求めることが出来ます。しかし、データを分析し、計算方法を作りあげるといふ視点から見ると、答をすぐ確かめることが出来るので、面白い題材だと思います。

分子をMとし分母をNとして

$M^2 + A = 2 \cdot N^2$ の式を使って $\sqrt{2}$ の近似分数を調べることは有益でした。

P.1 - P.2 は、表（その4）に至る経過を示します。P.3は精度を2倍にする計算法の

紹介です。P.4 - P.5は、ハレー法（3次収束）の再発見に至る経過を示します。

$\sqrt{2}$ の場合のKが6に着目して、近似分数の表を観察すると $[7/5]$ という分数が目にとまりました。 $7 = 6 + 1$, $5 = 6 - 1$ 。

Kを変化させたらどうなるのかの実験をしました。

$$X = \frac{K+2}{K-2}$$

$M^2 + A = B \cdot N^2$ を使って調べると

$A = B - 1$ と予想出来ます。

$$K = 2 + \frac{4}{X-1}$$

を用いた計算方法がみちびかれました。

$\sqrt{2}$ について（その1）

$X = 7/5$ とし、あとで分子を3倍すると

$\sqrt{2}$ について（その2）

加速法です。1回ごとに、Xを変化させます。

「 $\sqrt{2}$ について $\sqrt{2} = \frac{2}{1}$ より始めると、さあから求まりました。計算にマイナスがないの

でわかりやすいと思います。ニュートン法では、大きな近似値になってしまいましたが、ハレー法では、小さい近似値を求めることができます。こちらが本当の使い分けだと思います。

二宮先生に、 $\sqrt{x}$ (その2) の方法を示したところ、一般化しなければダメだと言われ

$$\sqrt{x} \approx \frac{3x+1}{x+3}$$

さらに、

$$x^{\frac{1}{n}} \approx \frac{(n+1) \cdot x + (n-1)}{(n-1) \cdot x + (n+1)}$$

にであうことができました。

$$\sqrt{x} \approx \frac{3x+1}{x+3}$$

の式に $x=4$ を代入すると

$$\frac{3 \times 4 + 1}{4 + 3} = \frac{13}{7}$$

2 よりも小さくなり、2乗すると

$$3.4489, \dots$$

となります。

そこで、分母を小さくする工夫をします。

$$\left[-\frac{a-1}{2} \right] \quad \text{一次補正}$$

の部分です。

$$\left[-\frac{35a^2}{209} \right] \quad \text{二次補正}$$

の補正方法は、5乗根の式を作る時にありました。

積分の台形公式とシンプソンの公式のうち、いは、直線で近似するの、か2次曲線で近似するの、かにより、後者は、同じデータを使っても精度は格段に良くなります。

曲線で曲線を近似する。今回のテーマはここかなと思います。

グラフ(絵)を使って考えていただくのがわかりやすいかなと思います。

データを集め、分析し、新しいものを、さがし出すこと。見つける行為は大切だと思います。もしよろしければ、御意見をお知らせ下さい。

1 に近い数の平方根の計算法

接線法

$$\sqrt{1+a} \doteq 1 + a \div 2$$

$$\sqrt{1.25} \doteq 1 + 0.25 \div 2 = 1.125$$

$$1.125^2 = 1.265625$$

改良形

$$\sqrt{1.25} \quad \begin{array}{ccccc} \frac{5}{4} & \times 4 & 20 & < 18 & +1 \\ & \times 4 & 16 & & -1 \end{array} \quad \frac{19}{17}$$

$$(5-4=1)$$

$$(20+16) \div 2$$

$$\left(\frac{19}{17}\right)^2 = \frac{361}{289} = 1.24913494809$$

接線法

$$\sqrt{\frac{9}{7}} \doteq 1 + \frac{1}{7}$$

$$9 \div 7 = 1.28571428571$$

$$\left(\frac{8}{7}\right)^2 = \frac{64}{49} = 1.30612244897$$

改良形

$$(9-7=2)$$

$$\sqrt{\frac{9}{7}} \quad \begin{array}{ccccc} \frac{9}{7} & \times 2 & 18 & < 16 & +1 \\ & \times 2 & 14 & & -1 \end{array} \quad \frac{17}{15}$$

$$\left(\frac{17}{15}\right)^2 = \frac{289}{225} = 1.28444444444$$

改良形

$$\sqrt{1.3} \quad \frac{13}{10} \times \frac{4}{3} \quad \frac{52}{30} < \frac{46}{3} \quad \begin{array}{c} +3 \\ -3 \end{array} \quad \frac{49}{43}$$

別解

$$\frac{3 \times 1.3 + 1}{1.3 + 3} = \frac{4.9}{4.3} = \frac{49}{43}$$

$$\sqrt{2} \text{ について } \sqrt{2} \doteq \frac{7}{5} \text{ より始めると}$$

$$x = \frac{2 \times 5^2}{7^2} = \frac{50}{49}$$

$$K = 2 + \frac{4}{\frac{50}{49} - 1} = 2 + \frac{4 \times 49}{50 - 49} = 198$$

$$\sqrt{2} \doteq \frac{(198+1) \times 7}{(198-1) \times 5} = \frac{199 \times 7}{197 \times 5} = \frac{1393}{985}$$

$$x = \frac{2 \times 985^2}{1393^2} = \frac{1940 \times 50}{1940449}$$

$$K = 2 + \frac{4}{\frac{1940450}{1940449} - 1} = 7761798$$

$$\sqrt{2} \doteq \frac{(7761798+1) \times 1393}{(7761798-1) \times 985} = \frac{10812186007}{7645370045}$$

区間近似への応用

平方根 $\sqrt{1+a} \doteq 1 + \frac{2a}{4+a}$

$\sqrt{4}=2$ を使用

$$1 + \frac{2a}{4+a - \frac{a-1}{2}} \quad (1 < a < 3)$$

$\sqrt{N}$

$$1 < N < 2 \quad 2 < N < 4$$

$$3 + \frac{-8}{N+3}$$

$$5 + \frac{-36}{N+8}$$

$$\sqrt{2} \doteq \frac{1393}{985} \text{ を使用}$$

$$1 + \frac{2a}{4+a - \frac{35a^2}{204}}$$

$$(0 < a < 1)$$

a	
0	1
0.25	1.117944641
0.5	1.224360737
0.75	1.322338534
1	1.414213198

連分数を分数に直す方法

$$\frac{577}{408} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{3}{2} & \frac{7}{5} & \frac{17}{12} & \frac{41}{29} & \frac{99}{70} & \frac{239}{169} & \frac{577}{408} \end{array}$$

$\uparrow$ (1より大きい場合) $\swarrow \frac{1}{2} \searrow$ $\uparrow$ (1より小さい場合は $\frac{0}{1}$)

$1 \times 3 + 2 \times 7 = \frac{19}{12}$
 $1 \times 2 + 2 \times 5 = \frac{12}{12}$

$\sqrt{7}$ (簡便法)

$$7 = 2^2 + 3 \rightarrow \sqrt{7} = 2 + \frac{3}{4 + 4 \times 2}$$

$$\begin{array}{cccccc} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{11}{4} & \frac{50}{19} & \frac{233}{88} & \frac{1082}{409} & \frac{5027}{1900} \end{array}$$

(3) (9) (27) (81) (243) (729)

$$(\frac{5027}{1900} \div \frac{1900}{1})^2 = 2.00020 \dots$$

補正法 7より大きい場合

$$\frac{5027}{1900} - \frac{729}{2 \times 5027 \times 1900} = 2.64575131134$$

C 3次収束の再発見への道

$\sqrt{2}$ の近似分数の表を使って

$\sqrt{2}$ の近似分数の表の作成

$$A > \frac{A+B}{2} > \sqrt{A \cdot B} > \frac{2 \cdot A \cdot B}{A+B} > B$$

の関係式を利用した反復法

$$2 = 2 \times 1 \quad A_1 = 2 \quad B_1 = 1 \text{ とする。}$$

$$\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \quad \frac{4}{3}$$

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12} \quad \frac{24}{17}$$

$$\frac{\frac{17}{12} + \frac{24}{17}}{2} = \frac{577}{408} \quad \frac{816}{577}$$

$$\frac{\frac{577}{408} + \frac{816}{577}}{2} = \frac{665857}{470832} \quad \frac{941664}{665857}$$

2次収束

$\sqrt{2}$ の近似分数の表 (その1)

$$\frac{3}{2}$$

$$\frac{4}{3}$$

$$\frac{17}{12}$$

$$\frac{24}{17}$$

$$\frac{577}{408}$$

$$\frac{816}{577}$$

$$\frac{665857}{470832}$$

$$\frac{941664}{665857}$$

分子を M とし分母を N として

$$M^2 + A = 2 \cdot N^2 \text{ として評価すると}$$

$$3^2 + A = 2 \cdot 2^2$$

$$4^2 + A = 2 \cdot 3^2$$

$$17^2 + A = 2 \cdot 12^2$$

$$24^2 + A = 2 \cdot 17^2$$

$$577^2 + A = 2 \cdot 408^2$$

$$816^2 + A = 2 \cdot 577^2$$

$$665857^2 + A = 2 \cdot 470832^2 \quad 941664^2 + A = 2 \cdot 665857^2$$

$$A = -1$$

$$A = 2$$

$\sqrt{2}$ の近似分数の表 (その1) を使って実験

$A = -1 \quad A = 2$ の分子、分母を横に加えてみる。

$$3 + 4 = 7$$

$$\frac{7}{5}$$

$$2 + 3 = 5$$

$$17 + 24 = 41$$

$$\frac{41}{29}$$

$$12 + 17 = 29$$

$$577 + 816 = 1393$$

$$\frac{1393}{985}$$

$$408 + 577 = 985$$

$$665857 + 941664 = 1607521$$

$$470832 + 665857 = 1073689$$

$$7^2 + A = 2 \cdot 5^2$$

$$\frac{1607521}{1073689}$$

$$41^2 + A = 2 \cdot 29^2$$

$$1393^2 + A = 2 \cdot 985^2$$

$$1607521^2 + A = 2 \cdot 1073689^2$$

$$A = 1$$

$\sqrt{2}$ の近似分数の表 (その2)

$$\frac{4}{3}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$\frac{7}{5}$$

$$\frac{24}{17}$$

$$\frac{17}{12}$$

$$\frac{41}{29}$$

$$\frac{816}{577}$$

$$\frac{577}{408}$$

$$\frac{1393}{985}$$

$$\frac{941664}{665857}$$

$$\frac{665857}{470832}$$

$$\frac{1607521}{1136689}$$

$$A = 2$$

$$A = -1$$

$$A = 1$$

$\sqrt{2}$ の近似分数の表 (その3)

$$\frac{4}{3}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$\frac{7}{5}$$

$$\frac{24}{17}$$

$$\frac{17}{12}$$

$$\frac{41}{29}$$

$$\frac{140}{99}$$

$$\frac{99}{70}$$

$$\frac{239}{169}$$

$$\frac{816}{577}$$

$$\frac{577}{408}$$

$$\frac{1393}{985}$$

$$A = 2$$

$$A = -1$$

$$A = 1$$

ユークリッド互除法を利用した連分数

577/408 の数値を利用して

$$\begin{aligned}
 577 &= 408 + 169 & \frac{577}{408} &= 1 + \frac{169}{408} \\
 408 &= 169 \times 2 + 70 & &= 1 + \frac{1}{\frac{408}{169}} \\
 169 &= 70 \times 2 + 29 & &= 1 + \frac{1}{\frac{70}{29}} \\
 70 &= 29 \times 2 + 12 & &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{70}{169}} \\
 29 &= 12 \times 2 + 5 & &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{169}{70}}} \\
 12 &= 5 \times 2 + 2 & &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{29}{70}}} \\
 5 &= 2 \times 2 + 1 & &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{29}{70}}}} \\
 2 &= 1 \times 2 & &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{29}{70}}}}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{577}{408} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{29}{70}}}}}}}}$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{5}{12}} = 1 + \frac{12}{29} = \frac{41}{29}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{12}{29}} = 1 + \frac{29}{70} = \frac{99}{70}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{29}{70}} = 1 + \frac{70}{169} = \frac{239}{169}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{29}{70}}}}}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{70}{169}} = 1 + \frac{169}{408} = \frac{577}{408}$$

$$3/2$$

$$7/5$$

$$17/12$$

$$41/29$$

$$99/70$$

$$239/169$$

$$577/408$$

$$A = -1$$

$$A = 1$$

 $\sqrt{2}$ の近似分数の表 (その3) の分子・分母の
たての関係を調べてみる。

分子について

$$A=2 \quad 140 \times 6 - 24 = 816$$

$$A=-1 \quad 99 \times 6 - 17 = 577$$

$$A=1 \quad 239 \times 6 - 41 = 1393$$

分母について

$$A=2 \quad 99 \times 6 - 17 = 577$$

$$A=-1 \quad 70 \times 6 - 12 = 408$$

$$A=1 \quad 169 \times 6 - 29 = 985$$

分子・分母のたての規則性は

$$a_{n+2} = 6 \cdot a_{n+1} - a_n$$

$$a_{n+2} = k \cdot a_{n+1} - a_n$$

$$\sqrt{2} \text{ の場合 } k=6$$

と表わすこととする。

 $\sqrt{2}$ の近似分数の表 (その4)

$$0/1 \quad 1/0 \quad 1/1$$

$$4/3 \quad 2/2 \quad 3/5$$

$$24/17 \quad 4/12 \quad 5/29$$

$$140/99 \quad 6/70 \quad 7/169$$

$$816/577 \quad 8/408 \quad 9/985$$

$$4756/3363 \quad 10/2378 \quad 11/5741$$

$$27720/19601 \quad 12/13860 \quad 13/33961$$

$$161564/114243 \quad 14/80782 \quad 15/195025$$

$$941664/665857 \quad 16/470832 \quad 17/1136689$$

$$A=2$$

$$A=-1$$

$$A=1$$

$\sqrt{2}$ の近似分数の表 (その2) $A = -1$
の数値を使った実験

$$\frac{3}{2} - \frac{17}{12} = \frac{1}{12} = \frac{1}{2 \times 3 \times 2}$$

$$\frac{17}{12} - \frac{577}{408} = \frac{1}{408} = \frac{1}{2 \times 17 \times 12}$$

$$\frac{577}{408} - \frac{665857}{470832} = \frac{1}{470832} = \frac{1}{2 \times 577 \times 408}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3 \times 2} = \frac{17}{12}$$

$$\frac{17}{12} - \frac{1}{2 \times 17 \times 12} = \frac{577}{408}$$

$$\frac{577}{408} - \frac{1}{2 \times 577 \times 408} = \frac{665857}{470832}$$

$\sqrt{2}$ の近似分数の表 (その2) $A = 1$
の数値を使った実験

$$\frac{7}{5} + \frac{1}{2 \times 7 \times 5} = \frac{7}{5} + \frac{1}{70} = \frac{99}{70}$$

$$\frac{41}{29} + \frac{1}{2 \times 41 \times 29} = \frac{41}{29} + \frac{1}{2378} = \frac{3363}{2378}$$

$$\frac{1393}{985} + \frac{1}{2 \times 1393 \times 985} = \frac{1393}{985} + \frac{1}{2744210} = \frac{3880899}{2744210}$$

倍精度補正

12

$\sqrt{2}$ の近似分数の表 (その4) の場所をさがす。

順序を決定する。

1	$\frac{1}{1}$		
2	$\frac{3}{2}$	$\rightarrow \frac{17}{12}$	($\overset{2}{2} \rightarrow \overset{4}{4}$)
3	$\frac{7}{5}$	$\rightarrow \frac{99}{70}$	($\overset{3}{3} \rightarrow \overset{6}{6}$)
4	$\frac{17}{12}$	$\rightarrow \frac{577}{408}$	($\overset{4}{4} \rightarrow \overset{8}{8}$)
5	$\frac{41}{29}$	$\frac{3363}{2378}$	($\overset{5}{5} \rightarrow \overset{10}{10}$)
6	$\frac{99}{70}$		
7	$\frac{239}{169}$		
8	$\frac{577}{408}$	$\rightarrow \frac{665857}{470832}$	($\overset{8}{8} \rightarrow \overset{16}{16}$)
9	$\frac{1393}{985}$	$\rightarrow \frac{3880899}{2744210}$	($\overset{9}{9} \rightarrow \overset{18}{18}$)
10	$\frac{3363}{2378}$		
11	$\frac{8119}{5741}$		
12	$\frac{19601}{13860}$		
13	$\frac{47321}{33461}$		

実験の結果

平方根の近似分数 M/N について

$M^2 + A = B \cdot N^2$ であれば

$\sqrt{B} \doteq \frac{M}{N} + \frac{A}{2 \cdot M \cdot N}$ とすることが出来る。

これを使って

$$M^2 + A = B \cdot N^2$$

$$B = \frac{M^2 + A}{N^2}$$

$$\sqrt{B} = \frac{\sqrt{M^2 + A}}{N}$$

$$\sqrt{M^2 + A} \doteq M + \frac{A}{2M} \text{ とすると。}$$

$$\sqrt{B} \doteq \frac{M}{N} + \frac{A}{2 \cdot M \cdot N}$$

これにより。

$$\sqrt{M^2 + A} \doteq M + \frac{A}{2M} \text{ を示すことができる。}$$

$\sqrt{2}$ の近似分数の表 (その4) を利用した
実験と観察

右上の部分の観察

	M	N
1/1	1	1
7/5	6+1	6-1
41/29	$6 \times (6+1) - 1$	$6 \times (6-1) - 1$
	M	N
	1	1
	k+1	k-1
	$k(k+1)-1$	$k(k-1)-1$

k を変化させるとどうなるのか。

$X = \frac{k+2}{k-2}$ の変形

$$X(k-2) = k+2$$

$$Xk - 2X = k+2$$

$$Xk - k = 2X + 2$$

$$k(X-1) = 2X+2$$

$$k = \frac{2X+2}{X-1}$$

$$k = \frac{2(X-1)+2+2}{X-1}$$

$$k = \frac{2(X-1)+4}{X-1}$$

$$k = 2 + \frac{4}{X-1}$$

$\sqrt{7}$ について (その1)

$X = 7/9$ とし、あと分子を3倍する。

$$k = 2 + \frac{4}{\frac{7}{9}-1} = 2 + \frac{36}{-2} = 2 - 18 = -16$$

M	N	3M	N
1	1	3	1
-15	-17	-45	-17
239	271	717	271
-3809	-4319	-11427	-4319
60705	68833	182115	68833

実験の結果

$(M/N)^2 = X$ とする

K	X	$k+2 / k-2$
2	—	—
3	5	5 / 1
4	3	6 / 2
5	7/3	7 / 3
6	2	8 / 4
7	9/5	9 / 5
8	5/3	10 / 6
9	11/7	11 / 7

$M^2 + A = B \cdot N^2$ による評価

$$k=6 \quad B=2 \quad A=1$$

$$k=5 \quad B=7/3 \quad A=4/3$$

$$k=4 \quad B=3 \quad A=2$$

$$k=3 \quad B=5 \quad A=4$$

$$k=4 \quad B=3$$

$$265^2 + A = 3 \cdot 153^2 \quad A=2$$

$$3691^2 + A = 3 \cdot 2131^2 \quad A=2$$

$$k=3 \quad B=5$$

$$521^2 + A = 5 \cdot 233^2 \quad A=4$$

$$3571^2 + A = 5 \cdot 1597^2 \quad A=4$$

$A = B-1$ と予想できる。

A を小さくするためには、B を 1 に近づける
必要がある。

$$239^2 + A = 7/9 \times 271^2 \quad A = -0.223 \div -2/9$$

$$(60705 / 68833)^2 = 0.7777777 \div 7/9$$

$$717^2 + A = 7 \times 271^2 \quad A = -2$$

$$(182115 / 68833)^2 = 6.9999999 \div 7$$

$\sqrt{2}$ について

$$3^2 - 1 = 2 \times 2^2 \quad \text{より}$$

$$X = \frac{2 \times 2^2}{3^2} = \frac{8}{9} \quad \text{とす}$$

$$K = 2 + \frac{4}{\frac{8}{9} - 1} = 2 + \frac{36}{-1} = -34$$

$$\sqrt{2} \approx \frac{(-34+1) \times 3}{(-34-1) \times 2} = \frac{99}{70}$$

$$X = \frac{2 \times 70^2}{99^2} = \frac{9800}{9801}$$

$$K = 2 + \frac{4}{\frac{9800}{9801} - 1} = 2 + \frac{39204}{-1} = -39202$$

$$\sqrt{2} \approx \frac{(-39202+1) \times 99}{(-39202-1) \times 70} = \frac{3880899}{2744210}$$

 $\sqrt{7}$ について (例2)

$$8^2 - 1 = 7 \times 3^2 \quad \text{より}$$

$$X = \frac{7 \times 3^2}{8^2} = \frac{63}{64} \quad \text{とす}$$

$$K = 2 + \frac{4}{\frac{63}{64} - 1} = 2 + \frac{256}{-1} = -254$$

$$\sqrt{7} \approx \frac{(-254+1) \times 8}{(-254-1) \times 3} = \frac{2024}{765}$$

$$2024^2 + A = 7 \times 765^2 \quad A = -1$$

$$X = \frac{7 \times 765^2}{2024^2} = \frac{4096575}{4096576}$$

$$K = 2 + \frac{4}{\frac{4096575}{4096576} - 1} = 2 + \frac{16386304}{-1} = -16386302$$

$$\sqrt{7} \approx \frac{(-16386302+1) \times 2024}{(-16386302-1) \times 765} = \frac{33165873224}{12535521795}$$

$$\sqrt{7} \approx \frac{33165873224}{12535521795} \quad \text{の誤差は} \quad \text{p.13参照}$$

$$A = -1 \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{2 \times 3.316 \times 10^{10} \times 1.253 \times 10^{10}}$$

$$\approx \frac{1}{8.309 \times 10^{20}} \approx 1.203 \times 10^{-21}$$

約 1.203×10^{-21} ほど大きくなる。

p.12の表より

$$\frac{3}{2} \rightarrow n=2 \quad \frac{99}{70} \rightarrow n=6 \quad \frac{3880899}{2744210} \rightarrow n=18$$

$$n \rightarrow 3n$$

3次42乗

27

$$\sqrt{X} \approx \frac{k+1}{k-1} \quad \text{に}$$

$$K = 2 + \frac{4}{X-1} \quad \text{を代入すると}$$

$$\sqrt{X} \approx \frac{2 + \frac{4}{X-1} + 1}{2 + \frac{4}{X-1} - 1}$$

$$= \frac{3 + \frac{4}{X-1}}{1 + \frac{4}{X-1}}$$

$$= \frac{3(X-1) + 4}{(X-1) + 4} = \frac{3X+1}{X+3}$$

$$\sqrt{X} \approx \frac{3X+1}{X+3} \quad X=1 \text{ の時に等号は成立する。}$$

これは $X=1$ の近くにおいて成立する近似関数と見ることが出来る。 $X^{\frac{1}{N}}$ の場合は?

$$\frac{A \cdot X + B}{B \cdot X + A} \quad \text{として、実験を1回} \quad \text{結果}$$

 $X^{\frac{1}{N}}$ の1近くの近似式は

$$\frac{(N+1)X + (N-1)}{(N-1)X + (N+1)}$$

$$2.3 \sqrt{1.05} \quad \text{は}$$

$$\frac{(2.3+1) \times 1.05 + (2.3-1)}{(2.3-1) \times 1.05 + (2.3+1)}$$

$$\frac{4.765}{4.665} = 1.0214362$$

$$\frac{4.765}{4.665} = 1.0214362$$

真数は 1.021439712

847 電卓で 847 を 23 計算と なるので

$$\begin{array}{r} 1638 \\ \times 2024 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1638 \\ \times 765 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33153120000 \\ + 12753224 \\ \hline 33165873224 \\ 12530700000 \\ + 4821795 \\ \hline 12535521795 \end{array}$$

K = 2

M	N
1	1
3	1
5	1
7	1
9	1
11	1

奇数 数列

K = 3

M	N
1	1
4	2
11	5
29	13
76	34
199	89
521	233
1364	610
3571	1597
9349	4189

$$\left(\frac{9349}{4189} \right)^2 = 4.9999996 \approx 5$$

K = 4

M	N
1	1
5	3
19	11
71	41
265	153
989	571
3691	2131
13775	7953
51409	29681

$$\left(\frac{51409}{29681} \right)^2 = 2.9999999 \approx 3$$

K = 5

M	N
1	1
6	4
29	19
139	91
666	436
3191	2089
15289	10009
73254	47956

$$\left(\frac{73254}{47956} \right)^2 = 2.3333332 \approx 7/3$$

K = 7

M	N
1	1
8	6
55	41
377	281
2584	1926
17711	13201

$$\left(\frac{17711}{13201} \right)^2 = 1.7999997 \approx 9/5$$

K = 8

M	N
1	1
9	7
71	55
559	433
4401	3409
34649	26839

$$\left(\frac{34649}{26839} \right)^2 = 1.6666665 \approx 5/3$$

K = 9

M	N
1	1
10	8
89	71
791	631
7030	5608
62479	49841

$$\left(\frac{62479}{49841} \right)^2 = 1.5714289 \approx 11/7$$