武田　利一　様

2019.8.20

林　紀英

双曲線近似法の性質および補正法について整理しました。

もしよろしければ、御意見をお知らせください。

おいそがしい日々をすごされていると思います。お体に気をつけて下さい。

コクヨ　ケ-35　20×20

簡易計算法としての双曲線近似法

平方根を直線で近似する場合、1点に接する直線と2点を結ぶ直線をまず考えると思います。前者は一点近似 後者は区間近似です。前者の接する点を1とすると $\sqrt{1+a} \fallingdotseq 1 + a/2$ となります。後者の区間を〔1－2〕とすると $\sqrt{1+a} \fallingdotseq 1 + 0.4142a \quad (0 < a < 1)$ となります。前者は大きな後者は小さな数値を示します。$\sqrt{1+a} \fallingdotseq 1 + 2a/(4+a)$ は曲線になります。2つの直線よりも真数に近くなります。一点近似（接線法）の一般式は $\sqrt[n]{1+a} \fallingdotseq 1 + a/n$ です。精度を良くするには高次多項式にします。テイラー展開法です。ニュートン補間多項式は区間近似に使います。最良有理式近似は次数の合計が同じ場合ニュートン補間多項式よりも精度が良くなります。双曲線近似法より最良有理近似の方が1桁精度が良くなります。双曲線近似法の長所は式の作り方が単純であることです。

平方根（区間 1→2の場合） $\sqrt{1+a} \quad (0<a<1)$

テイラー展開法 $1 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{128}a^4 +$

ニュートン補間多項式（4次式） $1 + 0.4994a - 0.119568a^2 + 0.044608a^3 - 0.01024a^4$

最良有理式近似（分子分母が1次式） $\dfrac{1.00038 + 0.67932a}{1 + 0.18805a}$

南山大学の杉浦洋先生に教えていただきました。

双曲線近似法 ― 反比例のグラフの曲線の活用

基本となる式（一点近似）

$$X^{\frac{1}{N}} \fallingdotseq \frac{(N+1)X + (N-1)}{(N-1)X + (N+1)}$$

平方根 $N=2$ 立方根 $N=3$

$$\frac{(2+1)x+(2-1)}{(2-1)x+(2+1)} = \frac{3x+1}{x+3} \qquad \frac{(3+1)x+(3-1)}{(3-1)x+(3+1)} = \frac{2x+1}{x+2}$$

双曲線の形

$$\frac{3x+1}{x+3} = \frac{-8}{x+3} + 3 \qquad \frac{2x+1}{x+2} = \frac{-3}{x+2} + 2$$

係数	-8	-3
水平移動	左へ3	左へ2
垂直移動	上へ3	上へ2

区間近似にする補正法（区間は $1 \to 2$）

南山大学の杉浦洋先生に教えていただきました。

$x = 1+a$ として変形する

$$\sqrt{1+a} \fallingdotseq 1 + \frac{2a}{4+a} \qquad \sqrt[3]{1+a} \fallingdotseq 1 + \frac{a}{3+a}$$

① 定数補正

$$1 + \frac{2a}{4+a} + 0.00071 \qquad 1 + \frac{a}{3+a} + 0.005$$

② 分子補正 ＋定数補正

$$1 + \frac{(29/14)a}{4+a} - \frac{1}{370} \qquad 1 + \frac{(131/126)a}{3+a} - 0.0018$$

③ 分母2次補正 ＋定数補正

$$1 + \frac{2a}{4+a-\frac{35a^2}{204}} + 0.00023 \qquad 1 + \frac{a}{3+a-\frac{9a^2}{59}} + 0.00018$$

④ 分子補正 ＋分母2次補正

$$1 + \frac{379/189\,a}{4+a-{}^{10}\!/_{63}\,a^2}$$