2021.3.11

武田利一様

おいそがしい日々をすごされていると思います。お体に気をつけて下さい。

北海道と九州の方より 4乗数と5乗数の和の公式の求め方についての御意見をいただきました。ありがとうございます。私の理解する範囲で説明します。

S_4を求めます。「打ち消しあう」考え方を使います。

$$(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$$

$$(n+1)^5-1=5S_4+10S_3+10S_2+5S_1+n$$

$$(n+1)^5-1$$

$$=5S_4+\underbrace{\frac{10}{4}n^2(n+1)^2}_{S_3}+\underbrace{\frac{10}{6}n(n+1)(2n+1)}_{S_2}+\underbrace{\frac{5}{2}n(n+1)}_{S_1}+n$$

$$S_4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$\sum_{k=1}^{n}k^4$ と $\sum_{k=1}^{n}k^2$ との比を用いると求める部分を

$\frac{1}{5}(3n^2+3n-1)$ （比は2次式となる。）

と小さくすることができます。比の階差数列が等差数列になることに着目します。階差数列の和の考え方を使い比の一般項を求めます。6乗和以上でこの方法を用いると計算が複雑になります。$\sum_{k=1}^{n}k^2$を$\sum_{k=1}^{n}k$との比を用いて求める方法の拡張です。

$n=10$までの和の数値の素因数分解の表が役に立ちました。

比を調べることで、すでに分かっている部分と未知の部分に分けることがポイントです。

三角数 $S_{(1)}-n$ の表から次のことがわかります。

n	0	1	2
1	1	1	1
1	2	3	4
1	3	$\boxed{6}$	10
1	4	10	$\boxed{20}$
1	$\boxed{5}$	15	35

の和 →

左右の数列を和の形で調べると.

左の数列の和が右の数列にあらわれます。

一般項の式は　左右の数列を積の形(比)で調べることで求めることができます。

$$1 \qquad \frac{N}{1} \qquad \frac{N(N+1)}{1\cdot 2} \qquad \frac{N(N+1)(N+2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{N^3+3N^2+2N}{6}$$

$\dfrac{N(N+1)}{1\cdot 2} = \dfrac{N^2}{2} + \dfrac{N}{2}$ の和の式が $\dfrac{N^3}{6} + \dfrac{N^2}{2} + \dfrac{N}{3}$ になります。

$\dfrac{N^3}{6} + \dfrac{N^2}{2} + \dfrac{N}{3}$ より $\dfrac{N}{2}$ の和の式をとりのぞくと $\dfrac{N^2}{2}$ の和の式です。

$$\begin{array}{rl} & \left(\dfrac{N^3}{6} + \dfrac{N^2}{2} + \dfrac{N}{3}\right) \\ - & \left(\dfrac{N^2}{4} + \dfrac{N}{4}\right) \\ \hline & \dfrac{N^3}{6} + \dfrac{N^2}{4} + \dfrac{N}{12} \end{array}$$

$\left(\dfrac{N^2}{2}\text{の和の式}\right)$

$\downarrow \times 2$

$$\frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}$$

このようにして　N^2 の和の式を求めます。

$(k+1)^n - k^n$ を使う方法

はこの方法が元になっているように思います。

Nの和の公式を求めるのに(N−1)までの和の公式を使わない方法は数列の一般項を求める方法でニュートン補間法があります。

林 邦英