※（紙上発表）

「本来の積分指導を ―数学Ⅱにおける―」

岩槻高等学校　飯島光治

現在教科書では、定積分を $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ と定義しますが、この式の意味を知るため、区分求積を導入します。また定積分の意義は面積、体積のみでなく、種々の量の総量が求まることにあり、その方向で。

はじめに

上記要旨でやられていたのは、戦後の新制高校から解析Ⅰ、解析Ⅱの時代、さらに1969年版（昭和44年）のたとえば日文の教科書では、種々の量を求める例―数学Ⅱですが―がでています。現在では、この要旨の方向で授業している人は少数と思われます。―2003年8月の数教協の全国大会では分科会30～40名の参加で、半数の方がやっていました。―

なお上記要旨以外で、定積分のあとに、不定積分をするのも、特徴です。

$\boxed{1}$ 積分法の展開 ―私の―

§1 逆微分法　記号 D^{-1}

§2 曲線で囲まれた面積を求める

(1) 区分求積法

(2) 面積の変化率を調べる

§3 微積分の基本定理

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

§4 定積分とその計算

§5 不定積分

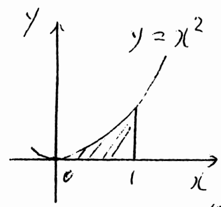
§6 速さ，時間→距離を求める

$\boxed{2}$ 1の内容例

§1　例 $D^{-1}(x^2+x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

教科書の不定積分の問を。

§2 (1)



左図の斜線部分の面積を求めるために[0, 1]を10等分して9個または10個の長方形に分ける。

（注）9個と10個の場合の両方した方が正確です。

S_9 または S_{10} を求める。

さらに100等分、1000等分していく。

一般には n 等分して、$n \to \infty$ にする。

(2) (1)の方法を、区分求積法という。考え方はわかり易いが、計算が大変です。この課題の解決のため1500～1600年後に、面積の変化率を調べるという方法がでてきた。この前提として、関数概念、微分法の成立がある。またここでは、具体的な式で表せない関数がでてきます。

(例) ・温度は、時間の関数

・明るさは、灯からの距離の関数

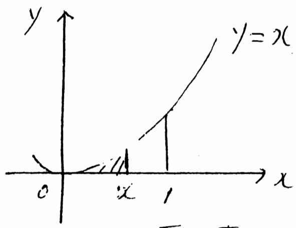
・睡眠時間は、疲れの関数

また 面積の変化率の準備の問として

「今、半径 r の円が、時間と共に一定の割合で、ひろがっていく。半径5の時の、この円の面積の変化率（＝増加率）は？」

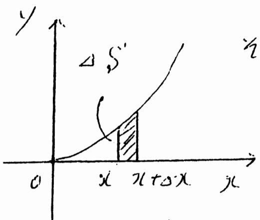
（注）$r=5$ のときの面積の変化率 $\Leftrightarrow$ $r=5$ のときのままで、仮に増えていくとしたときの単位時間当たりの面積の増える値。

以上を準備して



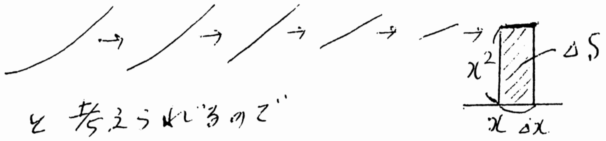
$y=x^2$ $[0,1]$ の面積をもとめるために、$[0,x]$ の面積を考える。x がきまると面積がきまるので面積は、x の関数。そこで

$S(x)$ ← 0から x までの面積 とおく。



そして $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}$ を調べる。

$\Delta x\to 0$ にしていくと $y=x^2$ の曲線部分が



と考えられるので

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=\frac{\text{長方形の面積}}{\text{よこの長さ}}=\text{たての長さ}=x^2$$

$\|$

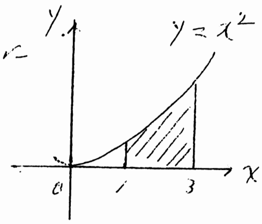
$S'(x)$ $\quad\therefore S'(x)=x^2$

↙

$S(x)$ の正体がわかる！

$S(0)=0$ で、$S=S(1)=\frac{1}{3}$

次に

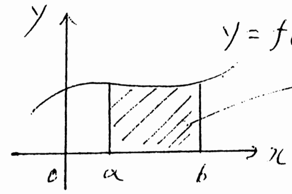


左図の面積；$[1,x]$ の面積を $S(x)$ とおく。

$S=S(3)$,

$S(1)=0$

一般のときも同様にして



$S=F(b)-F(a)$

（$F(x)$ は、$F'(x)=f(x)$ をみたす。）

§3 一般の時の区分求積法の式 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\Delta x$ を

$\int_a^b f(x)dx$ ① で表す。（dx は、Δx が微小のとき $\Leftrightarrow$ Δx の曲線部分がほぼ直線とみなせる程の長さ）

$F(b)-F(a)$ ②、①と②は同じ面積を表すので

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

そしてこの式の意味をいう。

§4 いままでは、$[a,b]$ で $f(x)>0$、$\int_a^b f(x)dx>0$ でしたが、計算では $f(x)<0$、$\int_a^b f(x)dx<0$ になっても、

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ とする。

（ここら辺、天下りですが、実際電気量を考えると、負の量がある。）

§5 $\int_a^x f(x)dx$ （または $\int_a^x f(t)dt$）、

$(a\leqq x\leqq b)$ を考える。$\int_a^x$ の x は、始め定数。$\int_a^x f(x)dx$

$=F(x)-F(a)$ がきまったら

変数となり，$F(x)-F(a)$は関数となる。$\int_a^x f(x)dx$を$f(x)$の不定積分という。
ふつう$\int_a^x$のaとxを省略して$\int f(x)dx$で表す。$[a,x]$で$f(x)>0$の時は，$[a,x]$での面積を表す。(注)
計算上ではD^{-1}と同じ。

(注) このようにしない時，積分関数のグラフを問う次がある。

問 関数$f(x)$を，次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases}-2x^2+4x & (0\leqq x<2)\\ 0 & (2\leqq x<4)\\ -\frac{1}{2}x+2 & (4\leqq x\leqq 6)\end{cases}$$

このとき $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ のグラフをかけ。

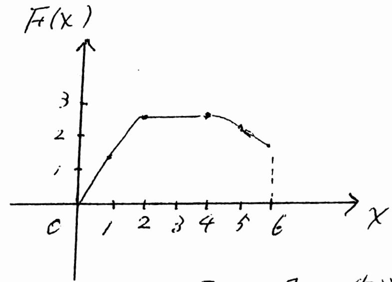
(方針) $0\leqq x<2$のとき $F(x)$はx軸と$f(x)$で囲まれた$[0,x]$の面積(の値)を表す。次に$2\leqq x<4$で$f(x)=0 \rightarrow$ 面積0 ということは，$0\leqq x<4$までは，$x=2$のときの面積の値のままでいくということ。$4\leqq x\leqq 6$のとき$f(x)$のグラフは，x軸の下側にきて，$4\leqq x\leqq 6$では$F(x)$は，「負の面積」になる。

$\int_4^4 f(t)dt=0$，$\int_4^5 f(t)dt=-\frac{1}{4}$

$\int_5^6 f(t)dt=-\frac{3}{4}$ より

$\int_0^4 f(t)dt=\frac{8}{3}$，$\int_0^5 f(t)dt=\frac{8}{3}-\frac{1}{4}=\frac{29}{12}$

$\int_0^6 f(t)dt=\frac{29}{12}-\frac{3}{4}=\frac{5}{3}$ となるので



＊この問を，長野県の進学校(いくつかの)では，正解(ないし同趣旨)率は306名中29名(9.5%)とのことです。(1984年3月と5月に実施)

(以上「積分を考える」(新海寛，三省堂ぶっくれっとNo.1 1985.6月刊)より)

3 定積分は，種々の量の総量を求める。

かけ算の1つ(もと)の意味として
(1あたり量)×(いくつ分)=(全体の量)
がある。例 うさぎ一匹当り耳2本 3匹では，耳いくつ？ この例では分離量ですが，微積分では，連続量になり，さらに1あたり量が，時間，空間で変化する場合の全体量(総量)を求めるのが定積分といえます。

(例1) 距離＝(速さ)×(時間)

cf $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ 速さ

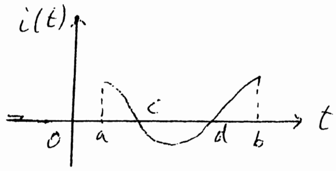
速さ×微小時間

距離 (注)この式を，微積分の基本定理という。

(例2) 質量＝(密度)×(体積)

(例13)

電気量＝(電流の強さ)×時間
〃
単位時間当りに流れる電気量。$i(t)$



$$\int_a^b i(t)\,dt = \int_a^c \underset{①}{i(t)}\,dt + \int_c^d \underset{②}{i(t)}\,dt + \int_d^b \underset{③}{i(t)}\,dt$$

①と③は、正で充電の過程
②は負で放電の過程
に相当する。

(例14) 人口＝(人口密度)×(面積)
人/m²

(例15) 圧力＝(xトン/m²)×(xmでの面積*)
*水面から測って

水面下xmの所では、1m²当たりxトンの水圧がかかることがわかっている。

(例16) 仕事量＝(力)×(距離)

以上各例について、具体的な問が、ありますが、紙数の都合で、省略します。

種々の総量を求めるという観点からすると、面積、体積を求めるは、図形的量（正の値となる）ということになります。

現在、面積、体積に

ウエイトが、かかりすぎていないか？

実際は、授業時間が足りないのですが、参考として、プリント補充する。そして種々の量を考えることにより、

$\int_a^b f(x)dx$ の $\underline{f(x)}$, $\underline{dx}$ が何を表すかが、はっきりしてくると思います。

特に、関数、微積分は量からスタートし、量がゴールのようにも思えます。

なお この展開（特に§2の(1)(2)の流れ）でいくと、体積を求めることも同様にできます。

以上「平成16年度教育課程研究会全体発表会」（埼玉県高数研）（平成17年2月刊）所収

＜ 追記 ＞

「本来の積分指導を ― 数II における ―」

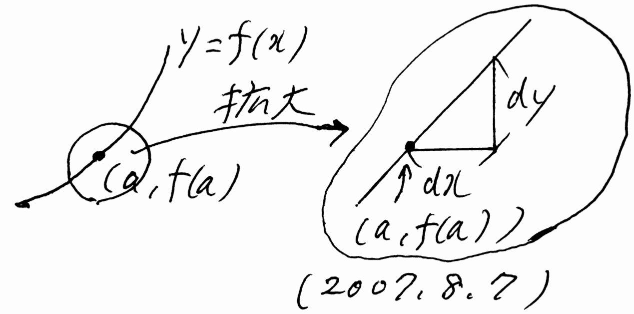
数教協全国大会（2007.8.3～8.5）の講座で、現在区分求積法（導入で）をやっている人は？と聞いた所30名中 7名でした。現在教科書で区分求積法で導入はありませんが、これでは積分の意味がわかりません。講座で千葉県の浅間さんより、全圧力を求めるのに、物理の教師は、積分の式でするとありましたが、この式の意味がわかるのが、数IIの積分法の目標と思いました。

（2007. 8. 7）

「dx と dy の自立とその効用について」

この2 dx と dy の自立で、教科書との関連から接線の式をだしましたが、本来は曲線上の1点を拡大（10倍、100倍、…、∞倍）すると直線と見分けがつかなくなる。―局所正比例― その直線の傾きは、一点$(a, f(a))$において、傾きを $f'(a)$ という記号を用いると

$\dfrac{dy}{dx} = f'(a) \rightarrow dy = f'(a)dx$ とした方が良いのではと思っています。



（2007. 8. 7）