

高校に内包量の流れを

2009.8.14

埼玉・高校 武田利一

1. はじめに

定年退職後、再任用として埼玉県立高校に、週に8時間×2日+4時間×2日=24時間分勤めています。久喜工業高校に15年間勤務していた関係で、すぐ近所にある日本工業大学に数学支援として7時間分の仕事を頼まれています。早く田舎暮らしをしたいと夢は見ているのですが、親の介護の関係で当分先になりそうです。また、工業高校で研究してきた上記のタイトルの続きもしたいと、いろいろ資料集めもしています。

工業高校在職中に勉強した「工業数理と内包量」は、現在勤務している高校でも「高校数学を学ぶ理由」への解答の一例を示せるのではないかと期待しています。

この内包量(下記の一覧表参照)は、速度、密度、濃度、流量、傾きなど日常身近にあることがたくさんありますので、実験や観察などを通して授業化できるのではないかと期待しています。しかし、その展開の工夫は数学教育協議会(数教協)の実践無くしては語れませんので、さらに学んでいく必要があります。

2. 内包量とは

液量、長さ、面積、体積と容積、重さ、時間、モーメント(トルク)などの「ものの存在の規模や広がり」を表す量を『外延量』(第1次的な量)と言い、加法性をもつ点がその特徴です。一方、このレポートで取り上げている『内包量』は、2つの外延量の相互関係によって決まり、「ある性質の強さ・程度」を表す量(第2次的な量)のことです。「1あたりの量」「単位あたり量」と、小学校や中学校では一般に呼ばれています。

高校では、あまり「内包量」という呼ばれ方をしないことが不思議です。たぶん、高校の勉強は公式を利用して計算演習はするが、具体例の量などについてはあまり意識しないで扱っているような気がします。実験をすれば、否応でも具体的な量が出てきますが、それをしないで物理などと棲み分けをしているのが現実でしょう。そのため、関数などのイメージが理解できないまま、記号としてしか扱わないように思います。イメージできなくても数学としての抽象化ができれば良いと考えているのでしょう。これでは、理解することは困難となります。その点実験を扱えば、関数の入力側のx(たとえば、時間)と、出力側のy(たとえば、距離)に量の単位がつくので、関数が具体的なイメージ(この関数は、時間から距離を求める計算式であると言うイメージ)として浮かんでくることができます。

そして、そのイメージの延長線上の密度や流量、勾配や速度などの内包量は、計算は難しいが存在は意識できるものとして無数に存在していることが分かります。社会生活の中にも自然界にも本当にたくさん存在しています。これらが、高校で「何のために数学を学ぶのか」または「高校数学を学ぶ理由」として、とても良い教材となると思います。

数教協の資料の中で、内包量が四種類に分類されています。

【内包量の分類】(注1)

分母 \ 分子	分布量	位差量
空間的な量	密度(A)	勾配(D)
時間	流量(B)	速度(C)

(注1) 増島高敬レポート「2時間で学ぶ量の理論・メモ」より

上記の内包量の分類自体も、小学校の授業実践の試行錯誤の結果、現在のような形でまとめられたものです。そしてその後、小中高でその指導実践が追求されています。しかし、一番進んでいる小学校の実践では、それらの内容と授業順がほぼ下記のようなようになります。A B Cの順です。Dについては中高でやるのか触れられていません。

【小学校での内包量の指導手順】(注2)

- A こみぐあい(電車ごっこ) A 収穫度(野菜づくり、雑草とり)・散布度(ペンキ塗り)
- A 人口密度(ドットで視覚化)・単価 A 濃度(食塩水、きな粉、砂糖水)
- A 物質密度(固体、液体) B 流量(交通量調査、観光ラリー、改札口ゲーム)
- C 速度(おもちゃの自動車レース、三輪車レース、玉運びレース、2人3脚レース、紙数え競争)
- 社会的内包量(カロリー摂取量、労働時間、交通事故数、米の消費量、化学肥料使用量)

(注2) 数学教室「リレー連載AMI40小学校-内包量」(和田常雄) p.72より

3. 高校の内包量

数教協の資料から、高校での内包量を微積分を絡めた分類表で示します。高校数学の目標と言われている微積分が、内包量の具体例なくしては語れないことが明らかであることが分かります。微積分の計算技術も大事ですが、その利用のされ方などが理解できる内包量の大切さが浮かび上がってきます。ただし、過去の数学者が証明した内容などは、大学生か専門家に任しても良いと思います。大学受験を受ける者にとってはそうもいかないでしょうが、ここではイメージ化の大切さを強調したいと思います。

また、応力などの具体例で登場するベクトルのイメージが、微分や割り算と絡まって広がっていくことが言えるようです。

【内包量と微積分の関連】(注3)

	x	y		
			分布型	位差型
空間型			密度(A)	勾配(D)
時間型			流量(B)	速度(C)
			積分 (第2用法) $a \times = y$ スカラー量	微分 (第1用法) $y / x = a$ ベクトル量
				場 時系列

(注3) 銀林浩著作「量の世界」より

工業高校の基礎で学んでいる「工業数理」の教科書の分析より、連続量÷連続量で計算される「単位あたり量」がたくさん出てきます。この単位あたり量が、高校数学の内包量理解を深めることができると考え、「単位がわかると物理がわかる」という本(注4)を読んでみました。その結果、単位があることでずいぶんと見えてくるものがあったので、単位を利用して下記のように「工業数理」の教科書を分析してみました。

(注4) ベレ出版「単位がわかると物理がわかる(SI単位系の成り立ちから自然単位系まで)」(和田純夫・大上雅史・根本和昭共著)

【工業数理に出てくる量の分類】

印は「度」系の内包量、 印は「率」系の内包量（注5）

（注5）異種の量の割り算を「度」、同種の量の割り算を「率」と言う。

工業数理基礎	量	演算	量	演算結果の量
カーナビ	GPS衛星と車の距離 (km)	÷	電波の到達時間 (s)	電波の速さ (km/s)
ピラミッドの底面積	長さ (m)	×	長さ (m)	面積 (m ²)
パルテノン神殿の黄金比	正面図の横の長さ (cm)	÷	正面図の縦の長さ (cm)	黄金比 (1.618)
紙のサイズ	横の長さ (mm)	÷	縦の長さ (mm)	A4サイズ (比 $\sqrt{2}$)
建ぺい率	建築面積 (m ²)	÷	敷地面積 (m ²)	建ぺい率 (%)
方眼紙を利用した面積	縮尺地図の面積 (km ²)	÷	正方形の個数 (個)	縮尺正方形の面積 (km ² /個)
加工部品の体積	底面積 (cm ²)	×	高さ (cm)	体積 (cm ³)
自動車の速さ	走行距離 (km)	÷	走行時間 (h)	自動車の速さ (km/h)
電流と電圧	電圧 (V)	÷	抵抗 (R)	電流 (I = V/R)
校舎の高さ	校舎の高さ (m)	÷	校舎までの距離 (m)	三角比 (tan)
物体の加速度	速さの変化 (m/s)	÷	時間 (s)	加速度 (m/s ²)
密度と質量	質量 (kg)	÷	体積 (m ³)	密度 (kg/m ³)
力	質量 (kg)	×	加速度 (m/s ²)	力 (N=kgm/s ²)
圧力・応力	面に働く力 (N)	÷	断面積 (m ²)	圧力 (Pa=N/m ²)
仕事	一定の力の大きさ (N)	×	移動した距離 (m)	仕事 (J=Nm)
仕事率	仕事 (J)	÷	時間 (s)	仕事率 (W = J/s)
電力	電圧 (V)	×	電流 (I)	電力 (W = VI)
電力量	電力 (W)	×	時間 (s)	電力量 (J = Ws)
運動エネルギー	質量 (kg)	×	速度 (m/s)	運動エネルギー (J=kgm ² /s ²)
位置エネルギー	質量 (kg)	×	高さ (m)	位置エネルギー (J=kgm ² /s ²)
速さ - 時間線図	速さ (km/h)	×	時間 (h)	走行距離 (km)
円運動	2π・半径 (m)	×	回転速度 (rpm)	周速度 (m/s)
角速度	周速度 (m/s)	÷	半径 (m)	角速度 (rad/s)
遠心力	運動エネルギー (kgm/s)	×	角速度 (rad/s)	遠心力 (N)
トルク	力 (N)	×	半径 (m)	トルク (Nm)
汚染物質の濃度	汚染物質の量 (cm ³)	÷	空気の量 (m ³)	百万分率 (ppm)
測定値	誤差 (mm)	÷	真の値 (mm)	誤差率 (%)
比例定数	グラフの y の変化量	÷	グラフの x の変化量	傾き (比例定数)
水の圧力	水の密度 (kg/m ³)	×	g (m/s ²)・水深 (m)	水の圧力 (Pa)
流体	断面積 (m ²)	×	流速 (m/s)	流量 (m ³ /s)
荷重	部材の引張力 (N)	÷	部材の断面積 (m ²)	応力 (Pa)
材料の安全率	引張強さ (MPa)	÷	許容応力 (MPa)	安全率

また、「工業数理」の教科書の演習問題の中には、あまり触れられることはないようだが、具体的な事例が大量に掲載されているので、これらの内容の分析と教材化が必要であると思う。以下の内容は改訂により省かれたものだが捨てるのはもったいないものもある。

ダムの貯水量	鉄道レールの傾き	振動する事象 (三角関数の関係からか?)
微分方程式	球形容器の設計	予測と計画 (全部)

一方、汚染などの環境問題と表計算ソフトの活用が入ってきているが、これらは、時代の要請から来るのだろうか。ともかく「工業数理」の内容は、外延量・内包量の具体例が全体のほとんどをしめていることが分かった。つまり、実社会で利用される内容の基礎には、外延量・内包量が深く根付いていることがわかった。この事実をもとに、一般の高校数学の内容も「内包量の観点」で編集し直して見てはどうだろうか。

4. 高校に内包量の流れを

小学校の指導順を参考にして、次の順で高校数学全体を再構成して指導してはどうだろうか。

A : 密度系	B : 流量系	C : 速度系	D : 勾配系
---------	---------	---------	---------

難易度から言って、割り算が出てくる微分系（CやD）から始めるよりは、掛け算の積分系（AやB）から始めた方が、計算が容易であるし、教具やパソコンなどの利用も可能であるので、生徒の理解が容易に思える。理解を深めることのできるイメージ図の「シェーマ」（数学用語）としては、AとBはかけわり図（長方形）、CとDは直角三角形が便利なようである。なお、下記にまとめた小学生向けの算数の参考書（注6）も活用できるだろう。

（注6）太田次郎社のらくらく算数ブックシリーズ「量の世界」（榊忠男監修・市川良著）と「比例の発見」（榊忠男監修・岩村繁夫著）より抜粋し下表を作成

<p>(A)「密度系」の指導プラン</p> <ul style="list-style-type: none"> 汚染物質の濃度 混雑率 トマトの収穫度 食料品の単価 人口密度 美味しい水の成分 アルキメデスの金冠 コップに浮かぶ氷 水槽にレンガを浮かす実験 世界の医師の数 	<p>(D)「勾配系」の指導プラン</p> <ul style="list-style-type: none"> 山の高さ 校舎の高さ
<p>(B)「流量系」の指導プラン</p> <ul style="list-style-type: none"> 河川の流量 コーラ工場のビンの流れ 駅の利用人数 高速道路の交通量 朝のラッシュ ゴミ問題 	<p>(C)「速度系」の指導プラン</p> <ul style="list-style-type: none"> 車のカーナビの仕組み 印刷機の速さ スペースシャトルのスピード 回転寿司の速さ 渋滞 パソコンの速さ

以上のことから、「高校に内包量の流れを」ということで、高校3年間の数学を次のように展開する内容と授業順を提起してみたい。

汚染物質の濃度に見られるような濃度系の1次関数を扱う。(シェーマ長方形の面積)

汚染物質の濃度に見られるような濃度系の2次関数を扱う。(区分求積法)

ゴミ問題に見られるような流量系の1次関数を扱う。(シェーマ長方形の面積)

ゴミ問題に見られるような流量系の2次関数を扱う。(区分求積法と定積分の記号)

速度系の1次関数を扱う。(シェーマ直角三角形の傾き)

速度系の2次関数を扱う。(瞬間速度と微分係数の定義)

微分の計算(微分の公式)

直線(1次関数)のグラフ(シェーマ直角三角形の傾き)

曲線(2次関数)のグラフ(接線の傾き、増減表とグラフ書き)

高次関数のグラフ書き(微分の利用で増減表)

不定積分の計算

定積分の計算と面積

高次関数の応用例

いろいろな関数(指数・対数・三角)の導入

いろいろな関数(指数・対数・三角)の応用例

以上を考える中で、基礎的な内容の扱いも大事であることに気づかされた。関数の代入計算、三角比、因数分解、解の公式、不等式、複素数、2点間の距離、内分外分、重心、円のグラフなどである。

現行の高校数学のカリキュラムは、膨大な数学全体の基礎を詰め込んでいるので、何かを捨てないと、「高校に内包量の流れを」は実現しないと思われる。どのように実現していけばよいのか。

5. 工業大学で扱っている内容で興味を持ったもの

高校数学の数学力不足を補うため、最近の工業大学では「学習支援」と言うことで、定年退職した高校数学教師を集めて、工業大学生の質問に対応するシステムができあがってきている。それに週1日だけだが支援している中で、具体例の質問のうち興味を持ったものが4つあるので、紹介したい。

(1) 4節リンク機構.....長さの違う4本のリンクをつないだもので、場合によってはロボットの足のような動きをするので、大変興味を持った。質問は三角関数と微分でした。

(2) 段差を乗り越えるローラー

.....テニスコートのローラーを引っ張る問題で、モーメントの具体的な勉強になる。イメージできなかったモーメントが身近に感じる事ができた。ベクトルや力がでてくる。

(3) 分布荷重の橋が歪むときの材料力学

.....地震などの対策として歪みの勉強だが、2次関数と1次関数が登場し、さらに微分の関係もあるのが面白い。工業大学生は、関数電卓と公式と計算表を使って計算しているが、応力やベクトルがたくさん出てくる。

(4) 鉄道のレール熱膨張で金属に応力が発生するのをどのように防ぐか。公式だらけだが、関数電卓が大活躍です。なぜ、レールに隙間があり、どのぐらいの隙間なのか金属との関係で求められるところに興味を持った。

まだ、4ヶ月ほどであるが、このあとどのような内容が登場するのでしょうか。高校数学では味わえない現実的なダイナミックさを感じています。

この中に、高校数学に利用できる具体例を探していきたいと思っています。計算はともかく、ロボットの足作りなどのような工作は、内包量の速度に関連して、高校数学でもできると思うので、取り入れていきたいものです。